D'après la banque CCP

Exercice 1. On va déterminer deux termes du DL de $\dfrac{\left(\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\Big(\ln(n^2+n)\Big)^2}$

Déterminer deux termes du DL de $\left(\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$

Déterminer deux termes du DL de $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

Déterminer deux termes du DL de $\Big(\ln(n^2+n)\Big)^2$ puis de $\dfrac{1}{\Big(\ln(n^2+n)\Big)^2}$

Conclure

Exercice 2.

1. La série $\displaystyle\sum \frac{\Big((-1)^n+\mathrm{i}\Big)\ln n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)}$ est-elle Absolument Convergente ?

   Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

2. On "connait" la formule de Stirling.

   Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

Série Télescopique : Application.

Exercice 3. [Correction] **La série Harmonique et la constante d'Euler**

1. La série Harmonique

   À l'aide de la série télescopique, montrer que la suite $\big(H_n-\ln(n)\big)$ converge

   En déduire qu'il existe une constante γ tel que $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1)$

   Bonus : En suivant la même démarche, montrer que : $\exists K$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to\infty}{=} \ln\big(\ln(n)\big)+K+o(1)$

2. La série Harmonique alternée

   CàD la suite des sommes partielles : $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$

   (a) On considère $A_n=\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ k\ pair}}^{n}\frac{1}{k}$ et $B_n=\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ k\ impair}}^{n}\frac{1}{k}$.

   Calculer A_n en fonction de $H_\square$. En déduire un équivalent de A_n.

   Calculer B_n en fonction de $H_\square$ et $A_\square$. En déduire un équivalent de B_n.

   (b) On considère la série Harmonique alternée $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$

   Exprimer S_n en fonction de A_n et B_n.

   En déduire que la série Harmonique alternée converge et calculer sa limite

Calcul de somme

Exercice 4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la suite définie par :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

1. Déterminer des DL avec 3 termes de $\ln(n)$, $\ln(n+1)$ et $\ln(n+2)$.
2. Comment choisir deux réels a et b pour que la série $\sum u_n$ converge
3. Dans le cas de convergence, simplifier S_n la n-ième somme partielle et déterminer la valeur de la somme.

Exercice 5. On considère la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+2)}$

$>$ Justifier la convergence de la série.

$>$ Décomposer en éléments simples $\displaystyle\frac{1}{n(n+2)}$ puis simplifier la somme partielle S_n et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

Exercice 6. On admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

Une série de signe chaotique

Exercice 7. [Correction] Le but est de montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(n)}{n}$ converge.

On note $\displaystyle S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(k)}{k}$ et $\displaystyle A_N = \sum_{k=1}^{N} \sin(k)$

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(n)}{n}$ n'est pas absolument convergente.

   Plutôt n'est pas A-cv de façon élémentaire ! !

2. On veut montrer que : $\displaystyle\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{N} \sin(k) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left({}^{1}/{}_{2}\right)}$
   (a) Méthode 0 : On l'admet et on finit l'exo.
   (b) Méthode 1 : Avec une somme Géo, CàD on sait que $\sin(\theta) = \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right)$.
   (c) Méthode 2 : Avec la clef et un télescope.
3. En déduire que la suite (A_n) est bornée et que la série $\displaystyle\sum \frac{A_p}{p(p+1)}$ converge
4. Convergence de la série $\displaystyle S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(k)}{k}$
   (a) Montrer que : $\displaystyle\forall\, N \geqslant 2,\ S_N = \frac{A_N}{N} + \sum_{p=1}^{N-1} \frac{A_p}{p(p+1)}$
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(n)}{n}$ converge.