Page 1

Exercice 1. [Correction] Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ On admet que f est bien définie et est croissante sur $\mathbb{R}_+$

1. Démontrer qu'il existe $A > 0$ tel que : Si $t \geqslant A$, alors $e^{-t^2} \leqslant 3.e^{-t}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie.

Exercice 2. [Correction] On va démontrer $\ln(x) \underset{x\to\infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall\, t > A,\ \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{t^{4/5}}$
2. En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ tel que : $\forall\, x > A,\ \ln(x) \leqslant K + x^{1/5}$
3. En déduire que : $\ln(x) \underset{x\to\infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$

Exercice 3. [Correction] Classique

1. Soit f une fonction avec $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \ell$ et vérifiant $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(2x) = f(x)$
   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x > 0$ *et* $\forall\, n,\ u_{n+1} = 2\,u_n$,
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. En déduire la limite suite $(f(u_n))$.
   (b) D'autre part, montrer que la suite $(f(u_n))$ est constante et déterminer sa limite.
   (c) Justifier que la fonction f est constante égale à ℓ.
2. Soit f une fonction avec $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \ell$ et vérifiant $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\dfrac{1}{2}x + 3\right)$.
   (a) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x > 0$ *et* $\forall\, n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 6.
   (b) En utilisant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la fonction f est constante égale à $f(6)$.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\cos x$ et que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a$

1. Montrer, par récurrence, que : $\forall x \in \mathbb{R}$ avec $x \not\equiv 0 \mod [\pi]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$
$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}.$$
2. Déterminer $f(x)$ puis la fonction f

Exercice 5. [Correction] Soit la fonction f définie par $f\,(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\ dt$ On admet que f est bien définie et est croissante sur $\mathbb{R}_+$

1. Démontrer qu'il existe $A > 0$ tel que : Si $t \geqslant A$, alors $e^{-t^2} \leqslant 3.e^{-t}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie.

Exercice 6. [Correction] On va démontrer $\ln(x) \underset{x\to\infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall\, t > A,\ \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{t^{4/5}}$

   En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ tel que : $\forall\, x > A,\ \ln(x) \leqslant K + x^{1/5}$
2. En déduire que : $\ln(x) \underset{x\to\infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$
3. **Bonus** : Démontrer que : Si $\alpha > 0$, alors $\ln(x) \underset{x\to\infty}{=} o(\sqrt[\alpha]{x})$

Exercice 7. [Correction] Classique

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\dfrac{1}{2}x + 3\right)$.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x > 0\ et\ \forall\, n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 6.
2. En utilisant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la fonction f est constante égale à $f(6)$.

Exercice 8. *Cesàro pour les fonction.*

Soit f une fonction $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction F définie par : $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

On suppose que $f(t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

On fixe $\varepsilon > 0$

1. Montrer qu'il existe $C, A > 0$ tel que : Si $t \geqslant A$ alors $\dfrac{1}{x}\left[C - (x-A)\varepsilon\right] \leqslant F(t) \leqslant \dfrac{1}{x}\left[C + (x-A)\varepsilon\right]$
2. En déduire qu'il existe $A' > 0$ tel que : Si $t \geqslant A'$ alors $-2\varepsilon \leqslant F(t) \leqslant +2\varepsilon$.
   Que peut-on conclure ?

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\cos x$ et que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a$

1. Montrer, par récurrence, que : $\forall x \in \mathbb{R}$ avec $x \not\equiv 0 \mod [\pi]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$f\,(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}.$$

2. Déterminer $f\,(x)$ puis la fonction f

Solution de l'exercice 1 **(Énoncé)**

1. On applique la définition de $e^{-t^2+t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ avec $\varepsilon = 3 > 0$.
2. On intègre sur $[A, x]$. On en déduit un majorant f au voisinage de $+\infty$.
   De plus la fonction f est croissante au voisinage de $+\infty$.
   Le théorème de la limite-monotone, permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie.

Solution de l'exercice 2 **(Énoncé)**

1. On considère $Q(t) = \dfrac{1/t}{1/t^{4/5}}$.

   On applique la def de $Q(t) \to 0$, Ainsi ....
2. On intègre l'inégalité sur $[A, x]$,

   Ainsi ......

   Puis on ajoute $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{t}\, dt$
3. On a pour tout $x > A$
$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} \leqslant \frac{\int_1^A \frac{1}{t}\, dt + 5\left(x^{1/5} - A^{1/5}\right)}{\sqrt[3]{x}}$$
   Et on finit On finit avec les gendarmes

$$\text{Conclusion : } \ln(x) \underset{x\to\infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$$

Solution de l'exercice 3 **(Énoncé)**

1. Pour tout x, on a facilement $u_n = 2^n\, x \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

   On étudie la suite $f(u_n)$

   > D'une part : $f(u_n) = f(2^n\, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

   > D'autre part : On applique l'égalité "$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(2x) = f(x)$" avec $x = u_n$
   >
   > Ainsi $f(u_n) = f(u_{n+1})$.
   >
   > Donc la suite $\Big(f(u_n)\Big)$ est constante et converge vers $f(u_0) = f(x)$

   Par unicité de la limité $f(x) = \ell$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et, $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{2}$

   Puis on étudie la suite $f(u_n)$

Solution de l'exercice 5 **(Énoncé)**

1. On applique la définition de $e^{-t^2+t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ avec $\varepsilon = 3 > 0$.
2. On intègre sur $[A, x]$. On en déduit un majorant f au voisinage de $+\infty$.
   De plus la fonction f est croissante au voisinage de $+\infty$.
   Le théorème de la limite-monotone, permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie.

Solution de l'exercice 6 **(Énoncé)**

1. On considère $Q(t) = \dfrac{1/t}{1/t^{4/5}}$.

   On applique la def de $Q(t) \to 0$, Ainsi ....
2. On intègre l'inégalité sur $[A, x]$,

   Ainsi ......

   Puis on ajoute $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{t}\, dt$
3. On a pour tout $x > A$
$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} \leqslant \frac{\int_1^A \frac{1}{t}\, dt + 5\left(x^{1/5} - A^{1/5}\right)}{\sqrt[3]{x}}$$
   Et on finit On finit avec les gendarmes

$$\text{Conclusion : } \ln(x) \underset{x\to\infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Pour tout x, on a facilement $u_n = 2^n\, x \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

   On étudie la suite $f(u_n)$

   $>$ D'une part : $f(u_n) = f(2^n\, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

   $>$ D'autre part : On applique l'égalité "$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(2x) = f(x)$" avec $x = u_n$
   Ainsi $f(u_n) = f(u_{n+1})$.
   Donc la suite $\Big(f(u_n)\Big)$ est constante et converge vers $f(u_0) = f(x)$

   Par unicité de la limité $f(x) = \ell$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et, $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{2}$

   Puis on étudie la suite $f(u_n)$