Programme de colle de la semaine 20

du Lundi 17 Mars au Vendredi 21 Mars.

Écrire une définition.

Pour chacun, on commence par écrire une ou deux ou plein de définition. Voici les dernières que l'on a vu

> Somme Partielle, Série et Série convergente.
> Série est A-cv, Série alternée, Série Télescopique.
> Le nombre a est adhérent à l'ensemble $\mathscr{D}$.
> L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
> La fonction f est croissante au voisinage de 1^-.
> La fonction f tend vers ℓ quand x tend vers a.
> La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a.
> La fonction f tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$.
> La fonction f est continue en a et continue sur $\mathscr{D}$.

Questions de cours et autour du cours.

> Adhérent

Montrer que π est dans l'adhérence de $\mathbb{Q}$.

> Inégalité Montrer les inégalités suivantes

E1. Montrer que : il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in \left]-\eta, \eta\right[, \ |\sin(x)| \leqslant 2|x|$

E2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ |\sin(x)| \leqslant |x|$

E3. Montrer que : il existe M et $\eta > 0$ tel que $\forall x \in \left]0, \eta\right[, \ \sin(x) \leqslant M x$

> À la limite On va montrer que $n^2 \underset{n\to\infty}{=} o\left(2^n\right)$

Montrer la suite $Q_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ est décroissante (à partir d'un certain rang)

De plus elle est positive, ainsi elle converge vers $\ell \geqslant 0$

Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall n \geqslant N_0, \ Q_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} Q_n$. En déduire avec un RA que $\ell = 0$

> Unicité de la limite

Démontrer que Si la fonction f tend vers ℓ quand x tend vers a, alors ℓ est unique.

> Positive au voisinage

Démontrer que

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x}{2} \\[2ex] \dfrac{x}{2} > 0 \ en\ 0^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \text{ est positive au voisinage } 0^+$$

> Limite monotone On va démontrer la FI classique : Pour tout $a > 0$, $x^a \ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Pour tout $a > 0$. On considère la fonction f_a définie sur $]0, +\infty[$ par $f_a(x) = x^a \ln(x)$

Montrer que la fonction f_a est décroissante au voisinage de 0^+.

En déduire que la fonction f_a admet une limite $\ell_a \leqslant 0$ quand $x \to 0^+$.

Déterminer une relation entre f_a et $f_{a/2}$. En déduire que $\ell_a = 0$.

Exercices

Des exercices sur la limite et la continuité.

Je finis la fonction de borne variable lundi et je commence les TVI et copain.