Généralités sur la continuité.

1 Continue.

1.1 Définitions.

Théorème 1. À méditer

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $a \in \mathscr{D}$.

On a alors

$$\left.\begin{array}{l} a \in \mathscr{D} \text{ donc on peut calculer } f(a) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \text{ existe} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(a) = \ell, \text{ CàD } \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

En effet à priori, quand $x \to a$ et $a \in \mathscr{D}$, on peut avoir $x = a$.

$$\left.\begin{array}{l} a \in \mathscr{D} \text{ donc on peut calculer } f(a) \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell \text{ existe} \end{array}\right\} \not\Longrightarrow f(a) = \ell, \text{ CàD on peut avoir } \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \neq f(a)$$

En effet quand $x \to a^+$, alors forcément, on a $x > a$.

Démonstration :

Démonstration de la première implication. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

$$\boxed{\text{On va montrer que : } \ell = f(a)}$$

Je considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante égale à a, CàD $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a$, on étudie la suite $(f(u_n))$.

> D'une part : la suite $(f(u_n))$ est constante égale à $f(a)$ ainsi $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$

> D'autre part : Comme $u_n \in \mathscr{D}$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ ainsi $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Par unicité de la limite, on a bien $\ell = f(a)$.

Contre-exemple pour de la deuxième implication.

Lorsque $f(x) = \lfloor x \rfloor$ et $a = 1$, on a

$$\lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0 \neq 1 = \lfloor 1 \rfloor$$

Définition 2. Continuité des fonctions.

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

> **Continue en a.**

Soit $a \in \mathscr{D}$. On dit que la fonction f est continue en a

$$\text{Ssi } \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Remarque : La définition dit 2 choses : d'une part la limite $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ existe et d'autre part $\ell = f(a)$.

> **Continue à droite en a.**

Soit $a \in \mathscr{D}$. On dit que la fonction f est continue à droite en a

$$\text{Ssi } \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

On définit de même la continuité à gauche.

> **Continuité sur $\mathscr{D}$.**

On dit que la fonction f est continue sur $\mathscr{D}$

Ssi f est continue en tous les points de $\mathscr{D}$, CàD $\forall a \in \mathscr{D}$, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Notation : L'ensemble des fonctions continues de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathscr{C}^0(\mathscr{D}, \mathbb{R})$.

Théorème 3. Limite à droite et à gauche

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $a \in \mathscr{D}$.

On suppose de plus que f est définie au voisinage gauche et droite de a.
On a
f est continue en a Ssi f est continue à gauche et à droite de a,

$$\text{CàD} \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

1.2 Prolongement par continuité.

Définition 4.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et Soit f une fonction de $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

> On dit que la fonction f est prolongeable à gauche en a

Ssi $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe et est **FINIE**.

Le prolongement de f, noté $\overline{f}$ ou $\widetilde{f}$, est définie sur $[a, b[$ par

$$\forall\, x \in]a, b[, \ \widetilde{f}(x) = f(x) \quad et \quad \widetilde{f}(a) = \lim_{a^+} f$$

De plus la fonction $\widetilde{f}$ ainsi définie est continue en a

On dit que $\widetilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en a.

Remarque : Les fonctions $\widetilde{f}$ et f sont clairement distinctes car elles n'ont pas le même ensemble de définition cependant, pour ne pas alourdir,

On choisit souvent de noter f le prolongement plutôt que $\widetilde{f}$.

> On définit de même le prolongement par continuité à droite.

> Si la fonction est définie de part et d'autre de a mais pas en a,
on dit que la fonction f se prolonge en a
Ssi la fonction f se prolonge à droite et à gauche de a (avec la même valeur).

Exemple important. Soit la fonction f définie sur $\mathscr{D}$ par $f(x) = x^a$ avec $a > 0$

$\mathscr{D}$ et prolongement éventuel ?

> On sait que la définition **la plus générale** de x^a, c'est

$$x^a = e^{a\ln(x)}$$

> La fonction f est définie, continue et même $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D} =]0, +\infty[$.

> Etude de la borne 0.
On a

$$x^a = e^{a\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} e^{-\infty} = 0 \quad \textit{Ce n'est pas une FI.}$$

Donc la fonction f se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = 0^a = 0$.
Cette défintion est cohérente avec les classiques $0^2 = 0$ *ou* $\sqrt{0} = 0$.

Exemple. Soit la fonction f définie sur $\mathscr{D}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$\mathscr{D}$ et prolongement éventuel ?

> La fonction f est définie, continue et même $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

> Etude de la borne 0.

Si $x \longrightarrow 0^+$. On a $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

Si $x \longrightarrow 0^-$. On a $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$.

Conclusion : la fonction f se prolonge par continuité à gauche de 0 avec $f(0) = 0$.

1.3 La fonction $h : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

Théorème 5.

Soit f une fonction continue de $\mathscr{D}_f$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathscr{D}$

On va étudier la fonction $F : x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

L'ensemble de définition de F, notée $\mathscr{D}$

On peut calculer le nombre $F(x)$

Ssi Le fonction f est continue sur $[a,x]$

Ssi $[a,x] \subset \mathscr{D}_f$

Continue, dérivable, $\mathscr{C}^1$

Comme f est continue, alors elle admet des primitives. Soit H l'une d'elle

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = H(x) - H(a)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow F'(x) &= \frac{d}{dx}\Big[H(x) - H(a)\Big] \\ &= \frac{d}{dx}\Big[H(x)\Big] - \frac{d}{dx}\Big[H(a)\Big] = f(x) - \mathscr{O} \end{aligned}$$

Interprétation-Notation

> *La fonction* $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ *est l'unique primitive de* f *qui s'annule en* a.

> $\int f$ *désigne une primitive de* f

Généralisation

On étudie `en suivant la même démarche` la fonction $x \longmapsto F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$

2 Opérations, Suites et Continuité.

2.1 Opérations et Continuité.

Théorème 6. Opérations classiques et continuité

Que l'on soit continue en un point a ou sur domaine $\mathscr{D}$, alors

une Somme, Combinaison Linéaire, Produit, Quotient (sous réserve que le dénominateur ne s'annule pas),
Composée de fonction continue en a (resp. sur $\mathscr{D}$)

est encore continue en a (resp. sur $\mathscr{D}$).

Démonstration : La démonstration est une simple conséquence des théorèmes sur les limites.

En effet, on suppose que f et g sont continue en a, on a donc $\lim_a f = f(a)$ et $\lim_a g = g(a)$, ainsi

$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g = f(a) + g(a) = [f+g](a)$$

Conclusion : Si f et g sont continues en a
Alors $[f+g]$ est continue en a.

Pour conclure sur $\mathscr{D}$, il suffit d'ajouter au début $\forall\, a \in \mathscr{D}$
On fait de même avec les autres opérations

Théorème 7. Fonctions usuelles et continuité.

Les fonctions usuelles (Monôme, Polynôme, exp / ln, sin / cos / tan, sinh / cosh / $tanh$, arctan / arcsin / arccos)
sont continues sur leur ensemble de définition.

Démonstration :

> Pour les monômes x, x^2, x^3,... : On le fait par récurrence avec l'opération produit car $x^{n+1} = x^n\, x$.
> Pour les monômes ${}^1/_x$, ${}^1/_{x^2}$, ... : On utilise l'opération quotient.
> Pour les monômes $x^a = e^{a\ln(x)}$: On attend ce qui suit pour ln et exp et on utilise les opérations.
> Pour ln : on sait $\ln(x) = \int_1^x {}^1/_t \, dt$ et on utilise la théorie des intégrales.
> Pour exp : on sait exp est la bijection réciproque de ln et à la fin de ce chapitre, on donnera le théorème qui assure la continuité des bijections réciproques.
> Pour sin / cos : on attend la spé pour une définition correcte de ces fonction.
Pour $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$: on utilise les opérations.
> Pour sinh / cosh / $tanh$: on utilise la définition et les opérations.
> Pour arctan / arcsin / arccos : à la fin de ce chapitre, on donnera le théorème qui assure la continuité des bijections réciproques.

Synthèse : Le théorème classique.

Si une fonction est fabriquée avec les fonctions usuelles et les opérations classiques

Alors elle est continue sur son ensemble de définition.

2.2 Suites et Continuité.

Théorème 8.
Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a \in \mathscr{D}$
On a équivalence

(i) f est continue en a, CàD $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathscr{D}$ et qui converge vers a
alors la suite $\left[f(u_n)\right]_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Démonstration : C'est la version "continue" du résultat analogue pour les limites des fonctions.
Le sens $(i) \Longrightarrow (ii)$ est très utile. Le sens $(ii) \Longrightarrow (i)$ est plus difficile à comprendre et en sup on s'en servira peu.

Théorème 9. Le classique $\ell = f(\ell)$
Soit I un intervalle et f une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in I$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$
On suppose que la suite est bien définie, CàD $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

On a alors
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et Si la fonction f est continue sur I

Alors $\ell = f(\ell)$ ou bien ℓ est une borne de I.

2.3 Lipschitzienne.

Définition 10.
Soit f une fonction.

Définition :

> On dit que la fonction f est k-lipschitzienne sur $\mathscr{D}$
Ssi $\forall\, x, x' \in \mathscr{D},\ \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k\left|x - x'\right|$.

> On dit que la fonction f est lipschitzienne sur $\mathscr{D}$
Ssi il existe k tel que la fonction f est k-lipschitzienne.

Propriétés.
Une fonction lipschitzienne est continue.

Contre-exemple : La réciproque est fausse.
La fonction $[x \longmapsto \sqrt{x}]$ est continue sur $[0,\infty[$ mais n'est pas lipschitzienne.

Démonstration :
> Pour tout $a \in \mathscr{D}$. On a $\left|f(x) - f(a)\right| \leqslant k\,|x - a|$.
Ainsi le théorème du module assure que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Donc f est continue en a et sur $\mathscr{D}$.

> On fait un RA. On suppose que $\forall\, x, x' \in [0,\infty[,\ \left|\sqrt{x} - \sqrt{x'}\right| \leqslant k\left|x - x'\right|$.
J'applique cette inégalité avec $x = 1/n$ et $x' = 0$.
Ainsi on a $\left|\sqrt{\dfrac{1}{n}} - \sqrt{0}\right| \leqslant k\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| \iff \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant k\dfrac{1}{n} \iff \sqrt{n} \leqslant k$
On regarde ce que devient l'inégalité quand $n \to \infty$, ainsi $\infty \leqslant k$ OUPS!!!!

3 Exercices.

Prolongement par continuité

Exercice 1. Les fonctions suivantes

> Sont-elles définie en 0 ?
Si non se prolongent-elles par continuité ?

> Lorsqu'on peut définir $f(0)$, le prolongement est-il dérivables, $\mathscr{C}^1$?

$$f(0)=1 \quad et \quad \forall x \neq 0,\ f(x)=\frac{sin(x)}{x} \qquad\qquad \forall x \neq 0,\ f(x)=\frac{x}{e^x-1}$$

Exercice 2. Les fonctions suivantes

> Sont-elles définie en 0 ?
Si non se prolongent-elles par continuité ?

> Lorsqu'on peut définir $f(0)$, le prolongement est-il dérivables, $\mathscr{C}^1$.

$$f(x)=x\ln(x) \qquad f(x)=x^{0.75} \qquad f(x)=e^{1/x} \qquad f(x)=x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f(x)=(1+x)^{1/x} \qquad f(x)=\frac{|x|}{x}$$

Exercice 3. Les fonctions suivantes

> Sont-elles définie en 0 (ou à la jonction) ?
Si non se prolongent-elles par continuité ?

> Lorsqu'on peut définir $f(0)$, le prolongement est-il dérivables, $\mathscr{C}^1$.

> Quand elle sont dérivables en 0 dire si elles sont $\mathscr{C}^1$ en 0.

$$f(x)=\begin{cases} =x^3 & Si\ x\geqslant 0 \\ =1-x & Si\ x<0\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} =1-x^4 & Si\ x>2 \\ =-15 & Si\ x<2\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} =\dfrac{\ln(1+2x)}{x} & Si\ x>0 \\ =1 & Si\ x=0 \\ =-4\dfrac{\ln(1-x/2)}{x} & Si\ x<0\end{cases}$$

Exercice 4. La partie entière est notre ami.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathscr{D}$ par $f(x)=\lfloor x\rfloor$.
   Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ de définition, l'ensemble de continuité et de dérivabilité et sur l'ensemble de dérivabilité, calculer f'.
2. Même interrogation avec $f(x)=\lfloor x\rfloor+\left(x-\lfloor x\rfloor\right)^2$
3. Même interrogation avec $f(x)=x\left\lfloor 1/x\right\rfloor$

Fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

Exercice 5. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(0) = f(0) \quad et \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

1. Montrer que la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$
2. Justifier que la fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Donner un DL en 0 de h puis de $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ et de F.

   En déduire que F continue en 0. (complément est-elle $\mathscr{C}^1$ en 0)

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sin(t)}\,dt$$

1. Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer f'
2. Étude la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t}$
   (a) Montrer que la fonction h est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
   (b) Soit H une primitive de h.

   Justifier que H existe et que $H(x) \underset{x\to 0}{=} H(0) + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$
3. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln(2)$

Lipschitzienne

Exercice 7. Montrer que la fonction $Arctan$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$

Correction.