Programme de colle de la semaine 20

du Lundi 17 Mars au Vendredi 21 Mars.

Questions de cours et autour du cours.

> Densité et continue. On sait/admet que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

> Donner la définition de $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

> On suppose que : $\forall\, a \in \mathbb{Q},\ f(a) = g(a)$.

Montrer que $f(\pi) = g(\pi)$ puis plus généralement que $f = g$

> Lipschitzienne.

Définition de Lipschitzienne.

Énoncer le TAF, CàD le Théorème des Accroissements Finis.

Démonstration de : Lipschitzienne $\implies$ Continue.

Bonus Justifier, avec un RA et et en utilisant la suite $u_n = {}^{1}/_{n}$,

que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

> Continuité et signe.

Soit f une fonction continue sur I, un intervalle, et qui ne n'annule pas.

Montrer que, sur I, la fonction f est de signe constante sur I.

> Bijection monotone.

Donner la définition de la fonction f est injective.

Démontrer qu'une fonction strictement croissante est injective.

Énoncer le théorème de la bijection monotone avec la conclusion sur la résolution des équations.

Démontrer le théorème de la bijection monotone.

> TVI. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, a_2, .., a_n) \in [0,1]^n$.

Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a - a_k| = \dfrac{1}{2}$

> Prolongement par continuité.

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$ se prolonge par continuité en 0.

En déduire que la fonction f est majorée/minorée sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$

En déduire qu'il existe $a > 0$ tel que : $\forall\, x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\cos(x) \leqslant e^{-a x^2}$

Exercices

Des exercices sur la limite et la continuité.

Je finis la fonction de borne variable lundi et je commence les TVI et copain.