Prolongement

Exercice 1. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

1. Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0.
2. **Bonus** Le prolongement est-il $\mathscr{C}^1$?
3. **Bonusnus** En déduire qu'il existe $a > 0$ tel que : $\forall x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}],\ \cos(x) \leqslant e^{-a\,x^2}$

Borne(s) variable(s).

Exercice 2. Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$

1. Montrer que la fonction : $h : t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ est définie continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$
2. En déduire que F est définie, continue dérivable sur $\mathscr{D} = \left]0, \dfrac{1}{2}\right[\cup]1,+\infty[$
3. Variation de F.
   (a) Résoudre, sur $]0,+\infty[$, l'inégalité $\dfrac{(1+x^2)^2}{1+4x^2} \geqslant 1$.
   (b) Calculer F' sur $]0,+\infty[$.
   (c) Déterminer les variations de F.
4. Étude en 0^+.
   (a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]0,\eta] \Rightarrow \dfrac{1}{\ln(1+t^2)} \geqslant \dfrac{1}{2\,t^2}$
   (b) Déterminer la limite de $F(x)$ quand $x \to 0^+$.

TVI et copain

Exercice 3. Une personne parcourt 10 km en $1h = 60'$.

Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 5 km

CàD $\exists t_0 \in [0,30],\ d(t_0+30) - d(t_0) = 5$ avec $d : t \longmapsto \ distance$

Exercice 4. Soit $(a_1, a_2, .., a_n) \in [0,1]^n$.

Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a - a_k| = \dfrac{1}{2}$

Exercice 5. *(Déjà vue ?)* Soit P un polynôme de degré 3

Démontrer, à l'aide du TVI, que P admet une racine réelle.

Exercice 6. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$.

Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = \dfrac{e^c - 1}{e - c}$.

Continue sur un segment

Exercice 7. Soit f et g deux fonctions définies, continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $\forall\ x \in [0,1]\,,\ 0 < f(x) < g(x)\,.$

Montrer qu'il existe $C > 1$ tel que $\forall\ x \in [0,1]\,,\ 0 < C.f(x) < g(x)\,.$

Exercice 8. Soit a, b deux réel avec $a < b$.

Soit f continue sur $[a,b]$ et g continue et positive sur $[a,b]$.

1. Montrer qu'il existe $u, v \in [a,b]$ tel que

$$\underbrace{m}_{=f(u)} \int_a^b g(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)\,g(t)dt \leqslant \underbrace{M}_{f(v)} \int_a^b g(t)dt$$

2. En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$

Synthèse

Exercice 9. [Correction] Soient f et g deux fonctions définies, continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

On va démontrer avec un RA que : Il existe $c \in [0,1]$ avec $f(c) = g(c)$

Comme on fait un RA, je suppose que $\forall x \in [0,1]\,,\ f(x) \neq g(x)\,.$

1. Montrer, **par un contraposée,** que : $Si\ \ [\forall x \in [0,1]\,,\ f(x) \neq g(x)]$ alors forcément

$$[\forall\ x \in [0,1]\,,\ f(x) < g(x)] \quad OU \quad [\forall\ x \in [0,1]\,,\ f(x) > g(x)]$$

$$\boxed{\text{On suppose pour la suite que } \forall x \in [0,1]\,,\ f(x) > g(x)}$$

2. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]\,,\ f(x) \geqslant g(x) + M$
3. Montrer **par récurrence** que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1]\,,\ [f \circ \cdots \circ f](x) \geqslant [g \circ \cdots \circ g](x) + nM.$$

4. En déduire une absudité. Conclure .

Exercice 10. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit f, g des fonctions continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que : $\forall x \in [a,b],\ \exists x' \in [a,b]$ tel que $f(x) = g(x')$

On va montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout $x \in [a,b],\ f(x) \neq g(x)$

1. Montrer que,sur $[a,b]$, on a $f - g > 0$ ou $f - g < 0$.
2. On suppose que $f - g < 0$.
   (a) Montrer que f et g possèdent chacune un maximum sur $[a,b]$. On les notera M_f et M_g.
   (b) Montrer que $M_f < M_g$ et conclure, CàD trouver OUPS.
3. On suppose que $f - g > 0$. Adapter le raisonnement et trouver OUPS