TVI et copains.

1 TVI et ses applications.

1.1 Le théorème et ses généralisations.

Théorème 1. Le Théorème des Valeurs Intermédiaires ou TVI

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f(a) > 0 \\ f(b) < 0 \end{array}\right\} \implies \text{Il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f(c) = 0$$

`Avec le TVI, on conclut : Il existe` $c \in \mathscr{D}$ `avec une condition de type =`

Généralisation : On peut remplacer $<$ par $\leqslant$, on conclut alors $c \in [a,b]$
On peut remplacer $[a,b]$ par $[a,b[$ ET $f(b) < 0$ par $f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} \ell < 0$
On peut utiliser avec $b = +\infty$ par $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell < 0$

1.2 Démonstration par dichotomie.

C'est la démonstration qui correspond à la démarche informatique.
Il y a 3 étapes.

> Étape 1 : On construit deux suites (a_n) et (b_n) avec des propriétés ad-oc.

> Étape 2 : On justifie que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
Ainsi elles convergent vers une même limite c.

> Étape 3 : On justifie que $c \in]a,b[$ et que $f(c) = 0$.

Étape 1 : Je choisis $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Je calcule $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$

$\boxed{\text{Si } f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) > 0}$	$\boxed{\text{Si } f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) < 0}$	$\boxed{\text{Si } f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) = 0}$
Je choisis $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$	Je choisis $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$	Alors $c = \frac{a_0+b_0}{2}$ convient Et le théorème est démontré.

On construit a_2 et b_2 en reproduisant le même schémas

Conclusion : On a construit deux suites (a_n) et (b_n)

avec des propriétés qui vont être détaillées ci-dessous.

Étape 2 : On va montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes

> Par construction, la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante.

> De plus dans toutes les situations, on a

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_0 - a_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
Ainsi elles convergent vers une même limite c.

Étape 3 : Comme les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes
Donc elles convergent vers une même limite c.

> $f(c) \geqslant 0$?

Par construction $\forall\, n,\ f(a_n) > 0$ et f est continue donc $f(x) \xrightarrow[x\to c]{} f(c)$, ainsi

$$\left.\begin{array}{c} \forall\, n,\ f(a_n) > 0 \\ a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c \\ f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(c) \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{À la limite } f(c) \underset{Large}{\geqslant} 0$$

> $f(c) \leqslant 0$?

On suit la même démarche avec la suite (b_n).

Conclusion : $f(c) = 0$**.**

> $c \in]a, b[$?

Comme les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers c donc

$$a = a_0 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant c \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_0 = b$$

Enfin $f(c) = 0 < f(a)$ et $f(c) = 0 > f(b)$ donc $c \neq a, b$ Donc $c \in]a, b[$

1.3 Démonstration avec les sup.

Voici le plan de la démonstration.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ avec $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$

On va démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

On considère l'ensemble $E = \{x \in [a, b]\ tq\ f(x) \geqslant 0\}$.

1. Justifier que $c = \sup(E)$ existe.
2. Comme $c = \sup(E)$ est adhérente,
   on sait qu'il existe une suite (e_n) tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ e_n \in E$ et $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$.
   En utilisant la suite (e_n), on montre que $c \in [a, b]$ et $f(c) \geqslant 0$
3. En utilisant la suite $\left(c + \dfrac{1}{n}\right)$, on montre que $f(c) \leqslant 0$.
4. Conclure.

1.4 Image d'un intervalle par une fonction continue.

Pour comprendre cette section (non-essentielle), il faut comprendre ce qu'est un intervalle !!!!

Définition 2. Un intervalle, c'est quoi ?

Dans $\mathbb{R}$: Intuitivement un intervalle,

C'est un ensemble de $\mathbb{R}$ sans trou !!!

> *La définition rigoureuse* : I est un intervalle Ssi

$$\text{Ssi } \forall x, y,\ \big(\ x, y \in I \implies [x, y] \subset I\ \big)$$

> *Interprétation de la définition.* On suppose que $\mathscr{D}$ est troué.

Je choisis $x, y \in \mathscr{D}$ tel que $x < trou < y$. On a alors

$x, y \in \mathscr{D}$ mais aussi $trou \in [x, y]$ et $Trou \notin \mathscr{D}$ donc $[x, y] \not\subset \mathscr{D}$!!!!

> Exemples :

$\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ est un intervalle Càd pas de trou.

$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$ est troué.

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\} = \cdots \cup \{-2\} \cup \{-1\} \cup \{0\} \cup \{0\} \cup \cdots$ est plein de trou.

$\mathbb{Q}$ est plein de trou mais ils sont plus difficile à "voir" que ceux de $\mathbb{Z}$

Théorème. Soit I un intervalle.

Je note $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

On a alors :

Soit $I = [a, b]$, Soit $I =]a, b]$, Soit $I = [a, b[$, Soit $I =]a, b[$

Conséquence : Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de la forme

> Les intervalles ouvert $]-\infty, \infty[$, $]-\infty, b[$, $]a, \infty[$

> Les intervalles semi-ouvert $]-\infty, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, \infty[$

> Les Segments, CàD les intervalles fermés et bornés, CàD $[a, b]$

Démonstration : La démonstration du théorème. Soit I un intervalle.

Je note $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Il y a 4 situation $[a \in I\ ou\ a \notin I]$ ou $[b \in I\ ou\ b \notin I]$.

On suppose que $a \in I$ et $b \notin I$

$$\boxed{\text{On va montrer que : } I = [a, b[}$$

On fait $\subset$ et $\supset$.

À finir. la démo est dans le poly 13-3-N,Z,R.

Essayer de la refaire c'est un exercice de manipulation des propriétés des sup et des inf.

Théorème 3. L'image d'un intervalle, c'est ....
Soit f une fonction définie de I à valeurs dans $\mathbb{R}$
On a alors

$$\left.\begin{array}{r} I \text{ est intervalle, }_{\text{,CàD n'a pas de trou}} \\ \text{La fonction } f \text{ est continue} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Im}(f)_{\text{, l'image de } f}\text{, est un intervalle}_{\text{, CàD n'a pas de trou}}$$

Exemples d'application.

> Soit f une fonction continue de I à valeurs dans $\mathbb{Z}$
Alors $\operatorname{Im}(f)$ est réduit à un seul élément, CàD la fonction f est constante.
Argument intuitif : $\operatorname{Im}(f)$ n'a pas de "trou" et $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{Z}$ donc ....
Rédaction rigoureuse : RA + TVI.

> Une fonction continue sur intervalle qui s'annule pas est forcément de signe constant.
Argument intuitif : Sinon 0 fait un "trou" dans $\operatorname{Im}(f)$.
Rédaction rigoureuse : RA + TVI.

Démonstration : Soit $b, b' \in \operatorname{Im}(f)$

On va montrer que $[b, b'] \in \operatorname{Im}(f)$, CàD $\forall y \in [b, b'], y \in \operatorname{Im}(f)$.

Soit $y \in [b, b']$.

$\boxed{\text{On va montrer que : } y \in \operatorname{Im}(f)}$

On va appliquer le TVI à la fonction $h(t) = f(t) - y$.

> Comme $b \in \operatorname{Im}(f)$, il existe α tel que $f(\alpha) = b$
Ainsi on a $h(\alpha) = f(\alpha) - y = b - y < 0$

> Comme $b' \in \operatorname{Im}(f)$, il existe α' tel que $f(\alpha') = b'$
Ainsi on a $h(\alpha') = f(\alpha') - y = b' - y > 0$

> La fonction h est continue sur $[\alpha, \alpha']$

Conclusion : D'après le TVI, il existe $c \in [\alpha, \alpha']$ tel que $h(c) = 0 \iff y = f(c)$
Donc $y \in \operatorname{Im}(f)$ Fini

1.5 Théorème de la bijection monotone.

Théorème 4. Théorème de la bijection monotone
Soit f une fonction de $[a, b[$.
On suppose que, sur $[a, b[$, la fonction f est strictement croissante et continue

$$\text{Alors la fonction } f \text{ réalise une bijection de } [a, b[\text{ sur } \left[f(a), \lim_{b^-} f \right[$$

Démonstration :
f est injective ?

Comme la fonction f est strictement croissante, la fonction f est injective. Déjà vu et déjà démontré.

f est surjective ?

Par définition de $\operatorname{Im}(f)$, la fonction est surjective sur $\operatorname{Im}(f)$

$\operatorname{Im}(f) = \left[f(a), \lim_{b^-} f \right[$?

Le théorème de la limite monotone assure $\lim_{b^-} f = \ell$ existe.

$\boxed{\text{On doit démontrer que } \operatorname{Im}(f) = [f(a), \ell[.}$

On fait $\subset$ et $\supset$ et on utilise le TVI.

2 Continue sur un segment.

2.1 Le théorème.

Théorème 5. Bornée et atteint ses bornes

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$

alors la fonction f est bornée sur $[a,b]$, CàD

Il existe m, M tel que : $\forall\, t \in [a,b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$

De plus elle atteint ses bornes,

CàD il existe $\alpha, \beta \in [a,b]$ tel que $m = f(\alpha)$ et $M = f(\beta)$

`Ce théorème permet de montrer :`

~~au voisinage~~ une inégalité du type $expression \leqslant M$

Démonstration

La démonstration est difficile et non-exigible!!!!

On suppose que la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$

On va montrer que $M = \sup\big(f(t),\ t \in [a,b]\big)$ est $<\infty$ et qu'il existe β tel que $M = f(\beta)$.

Étape 1. Comme $M = \sup$, on sait que M est adhérent,

Ainsi il existe une suite (t_n) tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ t_n \in [a,b]$ et $f(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M$.

Étape 2. Comme $\forall\, n \in \mathbb{N},\ t_n \in [a,b]$, on sait d'après Bolzano-Weierstrass

qu'il existe une suite extraite $(t_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite que je note β.

Ainsi $t_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$.

Étape 3. **Conclusion.** On va montrer que $\beta \in [a,b]$ et $f(\beta) = M$ et que $M < \infty$

> On a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a \leqslant t_{\varphi(n)} \leqslant b$ et $t_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$,

Ainsi à la limite, on a $a \leqslant \beta \leqslant b$.

> On a : D'une part $f(t_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} M$

et d'autre part $t_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$ et f est continue en β donc $f(t_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\beta)$

Par unicité de la limite, on a $f(\beta) = M$

Conclusion : on vient de trouver/construire $\beta \in [a,b]$ tel que $f(\beta) = M$.

comme f est définie en β, on a bien $M = f(\beta) < \infty$

2.2 Application à la norme infinie.

Définition 6. La norme infinie
Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La norme infinie de f sur $\mathscr{D}$, notée $\|f\|_\infty$ ou $\|f\|_{\infty,\mathscr{D}}$, c'est

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,\mathscr{D}} &\overset{def}{=} \sup\left(|f(t)|,\ pour\ t\in\mathscr{D}\right)\\ &= \text{le majorant optimal de } |f(t)| \text{ sur } \mathscr{D}\end{aligned}$$

Propriétés de $\|f\|_\infty$.

> Existe. Dans $\mathbb{R}$, certe le sup existe dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$
Donc par défaut, CàD sans argument supplémentaire, on a $\|f\|_\infty = +\infty$.

> Majore. Le majorant optimal est un majorant,
Ainsi on a : $\forall\, t\in\mathscr{D},\ |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty$ et $\|f\|_\infty$ ne dépend pas de t.

> Optimal. C'est le meilleur d'entre tous!!!

Théorème 7.
Soit f une fonction

On suppose que la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$

Alors $\|f\|_\infty \underset{strict}{<} \infty$

Généralisation.

$$\left.\begin{array}{r}\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell'\end{array}\right\} \Longrightarrow \|f\|_\infty \underset{strict}{<} \infty$$

Démonstration : Comme la fonction f est continue, alors la fonction $|f|$ est aussi continue.
Ainsi la fonction $|f|$ est aussi continue sur le segment $[a,b]$ donc elle est majorée
CàD il existe M tel que $\forall\, t\in[a,b],\ |f(t)|\leqslant M$.
Or $\|f\|_\infty$ est optimal, on a donc $\|f\|_\infty \leqslant M < \infty$

Théorème 8. $\mathscr{C}^1$ sur une segment $\Longrightarrow$ Lipschitzienne
Soit f une fonction

On suppose que la fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$

Alors $\|f'\|_\infty < \infty$ et la fonction f est $\|f'\|_\infty$-lipschitzienne.

Démonstration : La fonction f est $\mathscr{C}^1$ donc la fonction f' est continue sur le segment $[a,b]$
Donc le théorème précédent assure que $\|f'\|_\infty < \infty$

Pour tout $x, x'\in[a,b]$, on a

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x')| &= \left|\int_x^{x'} f'(t)\,dt\right|\\ &\leqslant \left|\int_x^{x'} |f'(t)|\,dt\right|\\ &\leqslant \left|\int_x^{x'} \|f'\|_\infty\,dt\right|\\ &\leqslant \left|\ \|f'\|_\infty (x-x')\ \right| = \|f'\|_\infty\,|x-x'|\end{aligned}$$

3 Continuité, monotonie et bijection réciproque.

Théorème 9.
Soit I un intervalle et f une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On a équivalence

(i) f est strictement monotone sur I (ii) f est injective sur I.

Démonstration : On a déjà fait $(i) \implies (ii)$ dans le cours sur l'injectivité.
La démonstration de $(ii) \implies (i)$ n'est pas exigible car avec les notions de sup, elle est lourde à rédiger.
Je vais faire celle de spé.
On considère $\mathscr{A} = \{f(x) - f(y) \text{ avec } x, y \in I^2 \text{ et } x < y\}$
On a alors

> Comme $\{(x, y) \in I^2 \text{ et } x < y\}$ est "d'un seul morceau" et que f est continue,
Alors $\mathscr{A}$ est d'un seul morceau.
Remarque : Un seul morceau se dit connexe en spé

> Comme $\mathscr{A}$ est d'un seul morceau et que $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$,
alors $\mathscr{A}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

> De plus, comme f est injective, $0 \notin \mathscr{A}$.

Conclusion : $\mathscr{A}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas 0 donc : Soit $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}_-^*$, Soit $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Situation $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}_-^*$.
On a que : pour tout $x < y$ alors $f(x) - f(y) < 0$. La fonction est donc croissante.
Situation $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}_+^*$.
On a que : pour tout $x < y$ alors $f(x) - f(y) > 0$. La fonction est donc décroissante.

Théorème 10.
Soit I un intervalle et f une fonction **croissante** de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On a équivalence

(i) f est continue sur I. (ii) $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration : On a fait la démonstration de $(i) \implies (ii)$ dans la section TVI.
Pour démontrer $(ii) \implies (i)$ on fait un R.A.

On suppose donc que : $f(I)$ est un intervalle et que f n'est pas continue.
On sait que

f est croissante alors : $\forall c \in I$, $\lim\limits_{c^-} f \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{c^+} f$

f est continue Ssi $\forall c \in I$, $\lim\limits_{c^-} f = f(c) = \lim\limits_{c^+} f$

Ici f est croissante et non continue donc il existe $c \in I$ avec $\lim\limits_{c^-} f < f(c)$ ou $f(c) < \lim\limits_{c^+} f$

> Situation $\lim\limits_{c^-} f < f(c)$.

Comme f est croissante, $x < c \implies f(x) \leqslant \lim\limits_{c^-} f$
et $x \geqslant c \implies f(x) \geqslant f(c)$, ainsi $f(I)$ n'est pas un intervalle absurde.

> On fait de même dans l'autre situation.

Théorème 11. Continuité de la bijection réciproque
Soit $I = [a, b[$ un intervalle.
Soit f une fonction strictement croissante et continue sur I

$$\text{alors } f \text{ réalise une bijection de l'intervalle } I = [a, b[\text{ sur } J = \left[f(a), \lim_{b^-} f \right[$$

De plus la bijection réciproque f^{-1} est continue sur J

Démonstration : La seule chose qu'il reste à justifier, c'est la continuité de f^{-1}.
On sait que

> Comme f est croissante donc f^{-1} est croissante

> Comme f est bijective de I sur J donc f^{-1} est bijective de J sur I
et donc $f^{-1}(J) = I$ est un intervalle.

Ainsi d'après le théorème précédent, f^{-1} est continue.

4 Exercices.

TVI classique

Exercice 1.

1. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$.
   Montrer qu'il existe un point fixe, CàD il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = f(1)$.
   Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = f\left(c + {}^1/_2\right)$.
3. une personne parcourt 4 km en 1 heure.
   Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 2. On considère une fonction f continue de $[0,+\infty[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$.
On suppose que $f(0) = 1$ et que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
De plus on suppose que $f(1) = 2$.

1. Démontrer qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = {}^3/_2$
2. Démontrer qu'il existe $b \in]1,+\infty[$ tel que $f(b) = {}^3/_2$

Exercice 3. Soit $(a_1, a_2, .., a_n) \in [0,1]^n$.
Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a - a_1| = \dfrac{1}{2}$

Exercice 4. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$.
Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = \dfrac{e^c - 1}{e - c}$.

Exercice 5. Soit P un polynôme de degré 3

Démontrer, à l'aide du TVI sur $]-\infty,+\infty[$, que P admet forcément une racine réelle.

Généraliser avec un polynôme de degré n impaire.

Exercice 6. Lemme de la corde ("facile")
On considère une fonction f continue sur $\mathscr{D} = [0,1]$ avec $f(0) = f(1) = 0$.

1. *Lemme de la corde "facile"*
   On suppose que : f est à valeur dans $\mathbb{R}^+$ et on prend $\lambda \in]0,1[$
   Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$, tel que $f(x_0 + \lambda) = f(x_0)$.

2. *Lemme de la corde (difficile)*
   On suppose que : f est à valeur dans $\mathbb{R}$
   On considère la fonction ϕ définie par $\phi(x) = f\left(x + {}^1/_n\right) - f(x)$.

   (a) Calculer $\phi\left(\dfrac{0}{n}\right) + \phi\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ldots + \phi\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$.

   (b) Est-il possible que
   $\forall k \in \{0,1,\ldots,(n-1)\},\ \phi\left({}^k/_n\right) > 0$?

   (c) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$, tel que $f\left(x_0 + {}^1/_n\right) = f(x_0)$.

Application moins évidentes du TVI

Exercice 7. On considère une fonction f continue de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

1. A l'aide d'une RA et en utilisant le TVI, Montrer que la fonction f est constante.
2. Est ce que le résultat est encore valable quand on suppose que la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 8.

1. **Bien utile.** Soit f une fonction continue sur I un intervalle et qui ne s'annule pas.
   Montrer que la fonction f est de signe constant, CàD soit positive de I ou soit négative sur I.
2. Application. Soit f une fonction continue
   Montrer que : Si $f^2(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$ alors soit $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$, soit $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} -1$

Continue sur un segment

Exercice 9. Soit f, g deux fonctions continues de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que $f < g$ sur $[a, b]$.

Montrer qu'il existe $m > 0$
tel que $\forall x \in [a, b]$ tel que $f(x) + m \leqslant g(x)$

Exercice 10. Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est bornée et g est continue.

1. Montrer que $f \circ g$ est bornée.
2. Montrer que $g \circ f$ est bornée.

Synthèse

Exercice 11. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit f, g des fonctions continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que : $\forall x \in [a, b]$, $\exists x' \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(x')$

On va montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \neq g(x)$

1. Montrer qu'alors $f - g > 0$.
   (a) Montrer que f et g possèdent chacune un maximum sur $[a, b]$. On les notera M_f et M_g.
   (b) Montrer que $M_f < M_g$ et conclure.
2. Retrouver le résultat si $f - g < 0$.

Bijection réciproque.

Exercice 12. On pose $f(x) = \ln(1 - \ln(x))$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{A}$ que l'on déterminera.
3. Expliciter l'application f^{-1}.