DM 19 Limite et borne sup.

Pour tous : Les exercices 1 et 2 sont obligatoires.
Pour Nivet, Baptiste,.... : les exercices 1,2, 3 et 4 sont obligatoires.

Utilisation des suites.

Exercice 1. [Correction] On considère une fonction f continue sur $\mathscr{D} = [0,1]$ avec $f(0) = f(1) = 0$.

1. *Lemme de la corde "facile"*
   On suppose que : f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et on prend $\lambda \in]0,1[$.
   On considère la fonction ϕ définie par $\phi(x) = f(x+\lambda) - f(x)$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de ϕ
   (b) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$, tel que $f(x_0+\lambda) = f(x_0)$.

2. *Lemme de la corde "difficile" mais détaillé*
   On suppose que : f est à valeur dans $\mathbb{R}$ et on prend $\lambda = n \in \mathbb{N}^*$
   On considère la fonction ϕ définie par $\phi(x) = f\left(x + {}^1/_n\right) - f(x)$.
   (a) Calculer $\phi\left(\dfrac{0}{n}\right) + \phi\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ldots + \phi\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$.
   (b) En utilisant le calcul précédent, montrer que l'hypothèse "$\forall\, k \in \{0,1,\ldots,(n-1)\},\ \phi\left({}^k/_n\right) > 0$ " est absurde
   (c) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$, tel que $f\left(x_0 + {}^1/_n\right) = f(x_0)$.

Exercice 2. [Correction] Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (E)$$

On va démontrer par différente méthode que la fonction f est nulle, CàD $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

1. **Généralités qui serviront peut-être dans la suite.**
   (a) Montrer que $\forall\, x,\ f(2x) = 2f(x)$.
   (b) Montrer que f est ${}^1/_2$-périodique.
2. **Méthode astucieuse.**
   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, {}^1/_2]$ tel que $\forall\, x \in [0, {}^1/_2],\ |f(x)| \leqslant |f(\alpha)|$
   Je note $K = |f(\alpha)|$.
   (b) En utilisant les questions Q1a et Q1b, justifier que $2K \leqslant K$.
   (c) Conclure.
3. **Méthode avec un RA et des suites.** On suppose que f n'est pas la fonction nulle, ainsi il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$.
   (a) Montrer qu'une fonction f continue et ${}^1/_2$-périodique est bornée sur $\mathbb{R}$.
   (b) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = f(2^n x_0)$
   Calculer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers ∞.
   (c) Trouver une absurdité.
4. **Méthode par les équations équations différentielles.**
   (a) On suppose dans cette question que la fonction f est $\mathscr{C}^1$.
   i. Montrer que : $\exists\, K,\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, alors $f'(t) = K$.
   ii. En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
   (b) On revient à la situation initiale, CàD la fonction f est seulement.
   Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, elle a des primitives. On note H l'une d'elle et on sait que H est $\mathscr{C}^1$ continue sur $\mathbb{R}$.
   Justifier, en primitivant (E), que la fonction f est $\mathscr{C}^1$.

Plus difficile

Exercice 3. Soit $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, continue et injective.
On suppose de plus que $f(a) < f(b)$

L'objectif de l'exercice est de démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[a, b]$.

Soit x, y avec $a < x < y < b$. *On va montrer que* $f(x) < f(y)$
Pour $t \in [0, 1]$, on considère les nombres $x_t = (1-t)a + tx$ et $y_t = (1-t)b + ty$

On va étudier, sur $[0, 1]$, la fonction $h : t \longmapsto h(t) = f(y_t) - f(x_t)$.

1. Montrer que : $\forall\, t \in [0, 1],\ x_t \neq y_t$. En déduire que la fonction h ne s'annule pas sur $[0, 1]$.
2. Montrer, à l'aide d'un R.A., que $\forall\ \in [0, 1], h(t) > 0$.
3. Conclure.

Exercice 4. [Correction] On considère les fonctions f, g deux fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$.
De pus on suppose que $f \circ g = g \circ f$.

On va montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$

On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in [0, 1],\ f(x) = x\}$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide.
   puis en déduire que $a = \inf(\mathcal{A})$ et $b = \sup(\mathcal{A})$ existent.
2. En utilisant que $a = \inf(\mathcal{A})$ est adhérent à $\mathcal{A}$, montrer que $a \in \mathcal{A}$, CàD que $a \in [0, 1]$ et $f(a) = g(a)$
   On montrerai de même que $b \in \mathcal{A}$.
3. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par g.
4. En appliquant le TVI, sur $[a, b]$, montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.