DM 18 Limite et borne sup.

Pour tous : Les exercices 1 et 2 sont obligatoires.
Pour Nivet, batiste,.... : les exercices 1, 3 et 4 sont obligatoires.

Utilisation des suites.

Exercice 1. [Correction] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = {}^{x}/_{2}$

1. En remarquant que $(f \circ f) \circ f = f \circ (f \circ f)$, montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'\left(\dfrac{x}{2}\right)$
2. En utilisant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$, que la fonction f' est constante.
3. En déduire que les seules fonctions qui conviennent sont les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ et $x \longmapsto -\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

Exercice 2. [Correction] **Banque CCP n°43**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\ell = 0$ est la seule limite possible pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose que $u_0 = x_0 \geqslant 0$.

   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. On suppose que $u_0 = x_0 \leqslant 0$.

   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   Conclusion : Dans toutes le situation, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

   `Indication : (re)-Lire l'exo 9 du poly de cours`

Plus difficile

Exercice 3. [Correction] Soit f une fonction croissante de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$

On va montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$

On considère $\mathscr{A} = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}$

1. Justifier que $c = \sup(\mathscr{A})$ existe.
2. À l'aide de la caractérisation séquentielle des $\sup$, justifier que $f(c) \geqslant c$.
3. Justifier que $f(c) \in \mathscr{A}$. Conclure que $f(c) = c$.

Exercice 4. [Correction] **Étude d'une suite définie implicitement.**
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation

$$x + e^{nx} = 2 \qquad (E_n)$$

On définit la fonction f_n par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x + e^{nx} - 2$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) admet une unique solution x_n sur $]0, \infty[$.
2. Convergence

   Déterminer le signe $f_n(x_{n+1})$.
   En déduire la monotonie de la suite (x_n) et que la suite (x_n) converge vers $\ell \geqslant 0$.
   À l'aide d'un RA, montrer que $\ell = 0$.

   Conclusion : la suite (x_n) converge vers 0, CàD $x_n \underset{n\to\infty}{=} o(1)$

3. En utilisant que $x_n + e^{n\,x_n} = 2$, montrer que : $x_n \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln(2)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{\ln(2)}{n} + \dfrac{\varepsilon_n}{n}$.

   Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{=} -\dfrac{\ln(2)}{2\,n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   Conclusion : $x_n \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2\,n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Pour tout x, On a $f\circ(f\circ f)\,(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $(f\circ f)\circ f\,(x) = \dfrac{f(x)}{2}$, Détaillons

$$\begin{aligned}
f\circ(f\circ f)\,(x) &= f\circ g\,(x) \quad \textit{avec } g = f\circ f\\
&= f\,\big(g(x)\big) \quad \textit{avec } g(x) = f\circ f(x) = \frac{x}{2}\\
&= f(\square) \qquad \textit{avec } \square = g(x) = \frac{x}{2}\\
&= f\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$(f\circ f)\circ f(x) = \textit{À détailler tout seul}$$

Ainsi on a $\forall\, x,\ f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{f(x)}{2}$. On dérive cette égalité ainsi $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'\left(\dfrac{x}{2}\right)$

2. `Comme expliquer dans le cour on va faire : d'une part et d'autre part`

   $>$ `D'une part`

   On applique cette égalité avec $x = u_n$, ainsi $f'(u_n) = f'(u_{n+1})$

   Donc la suite $\big(f'(u_n)\big)$ est constantes donc elle converge vers $\ell = f'(u_0) = f'(x)$ la valeur commune.

   $>$ `D'autre part`

   La suite (u_n) est une suite géométrique donc $\forall\, n\, u_n = u_0\,\dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   Ainsi $f'(u_n) = f'\square \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$ car la fonction f est continue en $x = 0$.

   Donc la suite $\big(f'(u_n)\big)$ converge vers $f'(0)$.

   Conclusion : Par unicité de la limite, pour tout x, $f'(x) = f'(0)$, CàD la fonction f' est constante.

3. Comme la fonction f' est constante, (avec une primitivation) on a $\forall\, x,\ \ f(x) = a\,x + b$

C'est la fin de l'analyse (car c'est une analyse-Synthèse ! ! ! !)

Synthèse

On a $\forall\, x,\ \ f(x) = a\,x + b$ et $f\circ f(x) = {}^{x}/_{2}$

Ainsi .....

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \left]0,1\right] \quad \text{et} \quad \forall\, n,\ u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. La suite est bien définie ?

Rappel de la théorie.

$>$ On "sait" que : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie Ssi $\forall\, n \in \mathbb{N}$, le nombre u_n se calcule.

$>$ Ici $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f = \arctan$, ainsi

le nombre u_{n+1} se calcule Ssi $\left|\begin{array}{l}\text{le nombre } u_n \text{ se calcule}\\ \textit{et}\\ u_n \in \text{l'ensemble de définition de Arctan} = \mathbb{R}\end{array}\right.$

$>$ Enfin la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente donc on va faire des récurrences

$$\boxed{\text{On fait par récurrence } H_{<n>} :\ \text{le nombre } u_n \text{ se calcule et } u_n \in \mathbb{R}}$$

Montrer que : $\ell = 0$ est la seule limite possible pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Comme la suite est du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et que la fonction f est continue,

on sait que ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$.

On résout l'équation $X = \sin(X)$

On étudie la fonction ϕ définie par $\phi : x \longmapsto (x) = x - \sin(x)$.

Grâce au tableau et à la bijection monotone, on a que la seul limite possible c'est $\ell = 0$.

2. On suppose que $u_0 = x_0 \geqslant 0$.

On fait ensuite par récurrence $H_{<n>}\ :\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

$>$ L'initialisation est vraie car $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = \phi(u_0) \leqslant 0$ car $u_0 \geqslant 0$

$>$ L'hérédité est vrai car

$$\left.\begin{array}{r} u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_n \\ u_n, u_{n+1} \in [0,1] \\ \text{La fonction Sinus est croissante sur } [0,1] \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \sin(u_{n+1}) \leqslant \sin(u_n) \\ \text{Donc } u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \end{array}$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$.

3. On suppose que $u_0 = x_0 \leqslant 0$.

On adapte ce qui précède.

4. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

$>$ D'une part

La suite $(h(u_n))$ est constante égale à $h(x)$, car ....

$>$ D'autre part

$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $h(\square) \to h(0)$ car h est continue

Donc la suite $(h(u_n))$ converge vers $h(0)$

Conclusion : la fonction h est constante (fin de l'analyse)

Comme les fonctions constantes conviennent (à voir c'est la synthèse), ce sont le solutions

Solution de l'exercice 3 **(Énoncé)**

1. L'ensemble $\mathscr{A}$ est non vide car $0 \in \mathscr{A}$. *(En effet f est à valeurs dans $[0,1]$ donc $f(0) \geqslant 0$)*
   De plus $\mathscr{A}$ est majorée par 1

   Conclusion : $c = \sup(\mathscr{A})$ existe et $0 \leqslant c \leqslant 1$

2. On saur que $c = \sup(\mathscr{A})$ est adhérent à $\mathscr{A}$
   Donc il existe une suite (a_n) tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathscr{A}$ et $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$.

   La fonction f est croissante et majorée par $f(c)$ et $a_n \leqslant c$, donc $a_n \leqslant f(a_n) \leqslant f(c)$

   Conclusion : quand $n \to \infty$ l'inégalité $a_n \leqslant f(c)$ devient $c \leqslant f(c)$

3. On sait que $c \leqslant f(c)$ et que la fonction f est croissante à valeur dans $[0,1]$
   Donc $f(c) \leqslant f(f(c))$ et $f(c) \in [0,1]$. Conclusion $f(c) \in \mathscr{A}$

   Comme $c = \sup(\mathscr{A})$ et $f(c) \in \mathscr{A}$, on a $f(c) \leqslant c$

   Conclusion : $f(c) \leqslant c \leqslant f(c)$, CàD $f(c) = c$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) **Étude d'une suite définie implicitement**

Soit n un entier $\geqslant 0$. On considère l'équation
$$x + e^{nx} = 2 \quad (E_n)$$
On note f_n la fonction définie par $f_n(x) = x + e^{nx} - 2$

1. La fonction f_n est C^{∞} sur $\mathbb{R}$. On
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = [x + e^{nx} - 2]' = 1 + ne^{nx}$$
On a facilement,
$$f'(x) > 0 \iff 1 + ne^{nx} > 0 \iff e^{nx} > \frac{-1}{n} \text{ C'est toujours vrai car } e^{\square} > 0$$
La fonction f Strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Conclusion

La fonction f est continue, Strictement croissante donc (grâce au thm de la bijection monotone), la fonction f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$

Comme $0 \in]-1, +\infty[_{Arrivée}$, il existe un unique $x_n \in]0, +\infty[_{Départ}$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. Convergence .

(a) On sait que $f_n(x_n) = x_n + e^{n\ x_n} - 2 = 0$, On a
$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= x + e^{(n+1)x_n} - 2 \\ &= x + e^{nx_n} e^{x_n} - 2 \\ &\text{On sait que } \ x_n > 0 \implies e^{x_n} > 1 \\ &> x + e^{nx_n}\ 1 - 2 = f_n(x_n) = 0 \end{aligned}$$

Donc $f_{n+1}(x_n) > 0$

$\rightarrow$ Comme la fonction f_{n+1} est croissante et que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, on a
$$\left.\begin{array}{c} f_{n+1}(x_n) > 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \\ \\ f_{n+1} \text{ est croissante} \end{array}\right\} \Rightarrow x_n > x_{n+1}$$

Donc la suite (x_n) est décroissante.

$\rightarrow$ La suites (x_n) est décroissante et $x_n > 0$ la suite (x_n) est minorée par 0.
Conclusion : la suite (x_n) converge vers $\ell \geqslant 0$.

(b) On suppose que $\ell > 0$. On a
$$f_n(x_n) = x_n + e^{n\ x_n} - 2 = 0$$
On a donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$ donc $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ainsi $e^{n\ x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$\rightarrow$ Donc à la limite quand $n \to +\infty$, $\ell + \infty = 2$ oups.

$$\begin{array}{l} \text{Conclusion : la suite } (x_n) \text{ converge vers } \ell \geqslant 0 \text{ et} \\ \qquad \ell > 0 \text{ est absurde donc forcément } \ell = 0 \end{array}$$

Conclusion : La suite (x_n) converge vers 0.

3. Comme $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a $x_n = o(1)$, CàD x_n est "petit" devant 2.
$$\begin{aligned} x_n + e^{n\ x_n} - 2 = 0 &\iff e^{n\ x_n} = 2 - x_n = 2 + o(1) \\ &\iff e^{nx_n} \underset{n\to\infty}{\sim} 2 \\ &\text{Donc } nx_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(2) \qquad \textit{car } f \sim g \implies \ln(f) \sim \ln(g) \end{aligned}$$
$$\text{Conclusion : } x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$$

4. PP et Développement. (La question 5.b est plus difficile).
On sait que
$$x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n} \iff x_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{\ln(2)}{n}\right)$$
Ainsi $x_n = \dfrac{\ln(2)}{n} + \varepsilon_n = \dfrac{\ln(2)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(2)}{n}\right) \implies \varepsilon_n = +o\left(\dfrac{\ln(2)}{n}\right)$

$$\text{On a } x_n + e^{n\,x_n} = 2 \iff \frac{\ln(2)}{n} + \varepsilon_n + e^{n\left(\frac{\ln(2)}{n} + \varepsilon_n\right)} = 2$$

$$\iff \frac{\ln(2)}{n} + \varepsilon_n + e^{\ln(2) + n\varepsilon_n} = 2$$

$$\iff 2.e^{n\varepsilon_n} = 2 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\iff e^{n\varepsilon_n} = 1 - \frac{\ln(2)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Ainsi } n\varepsilon_n = \ln\left(1 - \frac{\ln(2)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \square + o(\square) = -\frac{\ln(2)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Conclusion : $\varepsilon_n = -\dfrac{\ln(2)}{2\,n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(2)}{2\,n^2}$