Exercice 1.

1. Calculer les dérivée n-ième de $x^2\, e^x$ et de $x\,(1+x)^n$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \longmapsto x^{n-1}\ln(x)$

$$\text{Montrer par récurrence que : } \forall\, x > 0,\ f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$$

Indication : On remarquera que : $f_{n+1}(x) = x^n \ln(x) = x\, x^{n-1}\ln(x) = x\, f_n(x)$

Exercice 2. [Correction] On considère la fonction $F : x \longmapsto F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

1. Étude générale de F.
   (a) Montrer que la fonction F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$
   (b) Étudier la parité de F.
   (c) Montrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[\,,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant F(x) \leqslant 1.$
   (d) Déterminer les variation de F sur $]0,+\infty[$.
2. Étude locale de F en 0.
   (a) Déterminer le DL de F en 0 avec 3 termes.
   La fonction F se prolonge-t-elle en 0 ?
   (b) Le prolongement est-il $\mathscr{C}^1$?
3. Étude locale de F en $+\infty$:
   (a) Montrer que : $\forall x \in \,]0,+\infty[\,,\ F\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2xF(1) - x^2F(x).$
   (b) En déduire que la limite de $F(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 3. [Correction]

1. Soit deux nombres réels α et β

   Montrer que la fonction $\varphi : x \longmapsto \dfrac{(\alpha t^2 + \beta t)}{\sin\left({}^{t}/_{2}\right)}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$

2. On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$

   Expliquer comment vous feriez.

   Admettre la question car c'est un peu long et vous la ferez (ou pas) chez vous ?

3. On veut montrer que $\forall\, t \in]0, \pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

   Expliquer comment vous feriez.

   Admettre la question car c'est un peu long et vous la ferez (ou pas) chez vous ?

4. Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$
   (a) Justifier l'existence de $\|f\|$ et $\|f'\|$ et donner les propriétés de ces nombres.
   (b) À l'aide d'une IPP, montrer que : $\forall\, x > 0,\ \left|\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2\|f\| + \pi\|f'\|}{x}$

      En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^\pi f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = 0.$

5. Conclusion
   (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression de $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ à l'aide φ et d'une intégrale.
   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) 1. Étude générale de F

(a) Montrer que la fonction F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$

On sait que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Le nombre $F(x)$ se calcule Ssi $x \neq 0$ et la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $[0,x]$

Ssi $x \neq 0$ et $[0,x] \subset \mathbb{R}$

Ssi $x \neq 0$

Conclusion : comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

la théorie de l'intégration assure que la fonction F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$

(b) Étudier la parité de F.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $F(-x) = \dfrac{1}{-x}\displaystyle\int_0^{-x} \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

On fait le changement de variable $u = -t$, ainsi

$$F(-x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}du = F(x)$$

Conclusion : la fonction F est paire. On l'étudie sur $\mathscr{D} =]0,+\infty[$

(c) Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant F(x) \leqslant 1.$

Soit $x > 0$

$>$ $\forall t \in [0,x]\,,\quad 0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{1+0}}}_{=1}$

$>$ On intègre sur $[0,x]$

ainsi on a $\underbrace{\displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}dt}_{=\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}} \leqslant \displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt \leqslant \underbrace{\displaystyle\int_0^x 1dt}_{=x}$

On divise par $x > 0$,

Conclusion : $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant F(x) \leqslant 1.$

(d) Déterminer les variation de F sur $]0,+\infty[$.

On sait que F est $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ F'(x) = \cdots &= \frac{-1}{x^2}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt + \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\\ &= \frac{-1}{x}F(x) + \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\\ &= \frac{1}{x}\left[-F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\right]\end{aligned}$$

Comme $x > 0$ et avec l'inégalité précédente, on a $\forall x > 0,\ F'(x) \leqslant 0$, d'où le beau tableau..

2. Étude locale de F en 0.

(a) Déterminer le DL de F en 0 avec 3 termes.

On sait que $F(x) = \dfrac{H(x) - H(0)}{x}$ avec $H(x)$ une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$

De plus $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^4 + \dfrac{3}{8}x^8 + o(x^8)$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ est continue

Ainsi : $H(x) \underset{x\to 0}{=} H(0) + x - \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{3}{8}\dfrac{x^9}{9} + o(x^9)$

Conclusion : $F(x) = \dfrac{H(x) - H(0)}{x} \underset{x\to 0}{=} = \dfrac{x - \frac{x^5}{5} + \frac{3}{8}\frac{x^9}{9} + o(x^9)}{x} = x\,[1 + o(1)] \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$

Conclusion : La fonction F se prolonge par continuité en 0 avec $F(0) = 1$

(b) Le prolongement est-il $\mathscr{C}^1$?

3. Étude locale de F en $+\infty$:

(a) Montrer que : $\forall x \in \left]0, +\infty\right[,\ F\left(\frac{1}{x}\right) = 2xF(1) - x^2 F(x)$.

On a : $\forall x \in \left]0, +\infty\right[,\ F\left(\frac{1}{x}\right) = x\int_0^{1/x} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dt$

$= x\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dt + x\int_1^{1/x} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dt$

Dans la deuxième intégrale,

on fait le changement de variable $u = \frac{1}{x}$

$= x\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dt + x\int_1^{x} \frac{1}{\sqrt{1+{}^1/_{u^4}}}\frac{-du}{u^2}$

$= x\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dt + x\int_1^{x} \frac{u^2}{\sqrt{1+u^4}}\frac{-du}{u^2}$

$= 2x\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dt - x\int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}du$

$= 2xF(1) - x^2 F(x)$

(b) En déduire que la limite de $F(x)$ quand $x \to +\infty$.

On a

$$F(x) = \frac{1}{x^2}\left[2xF(1) - F\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{2F(1)}{x} - \frac{1}{x^2}F\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \quad \text{Pas FI}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Montrer que la fonction $\varphi : x \longmapsto \dfrac{\left(\alpha t^2+\beta t\right)}{\sin\left({}^{t}/_{2}\right)}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$

Soit deux nombres réels α et β

$>$ Le nombre $\varphi(t) = \dfrac{\left(\alpha t^2+\beta t\right)}{\sin\left({}^{t}/_{2}\right)}$ se calcule Ssi $\sin\left({}^{t}/_{2}\right) \neq 0$

Ainsi la fonction φ est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,\pi]$

$>$ De plus on a $\varphi(t) = \dfrac{\left(\alpha t^2+\beta t\right)}{\sin\left({}^{t}/_{2}\right)} = \dfrac{\left(\alpha t^2+\beta t\right)}{{}^{t}/_{2} - \frac{\left({}^{t}/_{2}\right)^3}{3!} + o(({}^{t}/_{2})^3)} = \dfrac{\beta t[1+o(1)]}{{}^{t}/_{2}\,[1+o(1)]} \longmapsto 2\beta$

Ainsi la fonction φ se prolonge par continuité en $x=0$ avec $\varphi(0)=2\beta$

$>$ Enfin $\varphi'(t) = \dfrac{(\alpha 2t+\beta)\sin\left({}^{t}/_{2}\right) - \left(\alpha t^2+\beta t\right)\frac{1}{2}\cos\left({}^{t}/_{2}\right)}{\sin^2\left({}^{t}/_{2}\right)}$

$$= \frac{(\alpha 2t+\beta)\left({}^{t}/_{2} - \frac{\left({}^{t}/_{2}\right)^3}{3!} + o(({}^{t}/_{2})^3)\right) - \left(\alpha t^2+\beta t\right)\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\left({}^{t}/_{2}\right)^2}{2!} + o(({}^{t}/_{2})^2)\right)}{\sin^2\left({}^{t}/_{2}\right)}$$

$$= \frac{t\left({}^{\beta}/_{2} - {}^{\beta}/_{2}\right) + t^2\left(\alpha - {}^{\alpha}/_{2}\right) + o(t^2)}{{}^{t^2}/_{4}\,[1+o(1)]}$$

$\to 2\alpha$

Ainsi, d'après le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$, la fonction φ est $\mathscr{C}^1$ en $x=0$ et $\varphi'(0)=2\alpha$

2. On veut montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$ On intègre par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t\cos(nt)dt &= \left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n}\,dt\\ &= 0 \qquad - \left[\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi\\ &= \frac{(-1)^n-1}{n^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t^2\cos(nt)dt &= \left[t^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi \frac{t\sin(nt)}{n}\,dt\\ &= -2\left(\left[-\frac{t\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{n^2}\,dt\right)\\ &= \frac{2\pi\cos(n\pi)}{n^2} - 2\left[\frac{\sin(nt)}{n^3}\right]_0^\pi\\ &= \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt = \frac{2\pi\frac{1}{2\pi}(-1)^n - ((-1)^n-1)}{n^2} = \frac{1}{n^2}$

3. On veut montrer que $\forall\, t\in]0,\pi]$, alors : $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$

Pour tout $t\in]0,\pi]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, alors :

$$\begin{aligned}C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{it}\right)^k\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{it(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{it}} - 1\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{itn}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1\right)\\ &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 \qquad \sin(a)\cos(b)=\tfrac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))\\ &= \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$

4. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,\pi]$ donc f et f' sont bornées , ainsi $\|f\| = \sup\limits_{t\in[0,\pi]}(|f(t)|)$ et $\|f'\| = \sup\limits_{t\in[0,\pi]}(|f'(t)|)$ sont finis, ainsi

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\pi} f(t)\sin(xt)dt\right| &= \left|\left[\frac{-\cos(xt)}{x}f(t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} f'(t)\cos(xt)dt\right| \\
&= \left|\left[\frac{-\cos(x\pi)}{x}f(\pi) + \frac{\cos(0)}{x}f(0)\right] + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} f'(t)\cos(xt)dt\right| \\
&\leqslant \frac{|\cos(x\pi)|}{x}|f(\pi)| + \frac{|\cos(0)|}{x}|f(0)| + \frac{1}{x}\int_0^{\pi}|f'(t)|\,|\cos(xt)|\,dt \\
&\leqslant \frac{1}{x}\|f\| + \frac{1}{x}\|f\| + \frac{1}{x}\int_0^{\pi}\|f'\|\,1\,dt \\
&\leqslant \frac{2\|f\| + \pi\|f'\|}{x}
\end{aligned}$$

Le théorème de la distance permet de conclure $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{\pi} f(t)\sin(xt)dt = 0$

5. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Donner une expression de $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ à l'aide φ et d'une intégrale.

   On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)dt \\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)dt \\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)dt \\
&= \int_0^{\pi}\left[\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4\pi}\right]dt + \int_0^{\pi}\left(\frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi}\left(\frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt
\end{aligned}$$

   En déduire l'existence et la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$

   Comme φ est $\mathscr{C}^1$, on sait d'après le résultat précédent que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt = 0$, par suite

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$