Dérivable-Dérivée n-ième

Exercice 1. [Correction] Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose de plus que $f(0)=0,\ f'(0)=0$ et $f(1)=1,\ f'(1)=0$

On va démontrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tq $f'(c)=\dfrac{f(c)}{c}$

On considère la fonction ϕ définie par $\phi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

1. Justifier que f admet un DL en 0 et déterminer le.
2. Montrer qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $\forall x\in[0,1],\ \phi(x)\leqslant\phi(c)$.
   Justifier que $c\neq 0$.
3. (a) Justifier que f admet un DL en 1 et déterminer le.
   En déduire le DL de la fonction ϕ en $x=1$.
   (b) Montrer qu'il existe $\eta>0$ tel que $\forall x\in[1-\eta,1[,\ \phi(x)>\phi(1)$.
   En déduire que $c\neq 1$.
4. En déduire que $\phi'(c)=0$ puis conclure.
   Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 2. [Correction] Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $\forall x\in[0,1[,\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1. Démontrer que f est solution sur $[0,1[$ de l'équation différentielle : $(1-x^2)\,y'=x\,y$.
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, on dérive n fois l'équation différentielle, en déduire une relation
3. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\ f^{(n)}(x)\geqslant 0$.

Un problème

Exercice 3. [Correction] Soit f une fonction définie continue et **positive** sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Soit la fonction g définie par : $g(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{f(t)}{1+x\sin t}dt$.

1. Montrer (admettre) que g est définie sur $]-1,+\infty[$.
2. On suppose dans cette question que : $\forall t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ f(t)=\cos t$.
   Calculer $g(x)$.
3. On suppose dans cette question que : $\forall t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ f(t)=\sin(2t)$.
   Calculer $g(x)$. *on pourra faire le changement de variable $u=\sin(t)$*
4. Soit a un réel supérieur strictement à -1.
   Montrer qu'on peut trouver un réel K tel que :
   $$\forall(x,y)\in]a,+\infty[^2,\qquad |g(x)-g(y)|\leqslant K\,|x-y|.$$
   En déduire que la fonction g est continue sur $]-1,+\infty[$.

5. **Sans utiliser la dérivabilité, CàD avec la définition**, montrer que g est décroissante sur $]-1,+\infty[$.
6. Limite de g en $+\infty$.

   (a) Montrer que la fonction f est majorée sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   (b) Soit M un majorant de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\varepsilon > 0$.

   En écrivant $\displaystyle\int_0^{\pi/2} = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi/2}$, montrer que : $\forall x > 0, \quad g(x) \leqslant M\varepsilon + \dfrac{M\pi}{2(1+x\sin b)}$.

   (c) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

Révision TD.

Exercice 4. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

1. Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0.
2. En déduire qu'il existe $a > 0$ tel que : $\forall\, x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}],\ \cos(x) \leqslant e^{-a\,x^2}$

Exercice 5. Soit a, b deux réel avec $a < b$.

Soit f continue sur $[a,b]$ et g continue et positive sur $[a,b]$.

1. Montrer qu'il existe $u, v \in [a,b]$ tel que

$$\underbrace{m}_{=f(u)} \int_a^b g(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)\,g(t)dt \leqslant \underbrace{M}_{f(v)} \int_a^b g(t)dt$$

2. En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$

Plus difficile. La question Q3 est "intéressante".

Exercice 6. [Correction] Soient f et g deux fonctions définies, continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

On va démontrer avec un RA que : Il existe $c \in [0,1]$ avec $f(c) = g(c)$

Comme on fait un RA, je suppose que $\forall\, x \in [0,1],\ f(x) \neq g(x)$.

1. Montrer, **par un contraposée,** que : $Si\ [\forall\, x \in [0,1],\ f(x) \neq g(x)]$ alors forcément

$$[\forall\ x \in [0,1],\ f(x) < g(x)] \quad OU \quad [\forall\ x \in [0,1],\ f(x) > g(x)]$$

$\boxed{\text{On suppose pour la suite que } \forall x \in [0,1],\ f(x) > g(x)}$

2. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant g(x) + M$
3. Montrer **par récurrence** que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ [f \circ \cdots \circ f](x) \geqslant [g \circ \cdots \circ g](x) + nM.$$

4. En déduire une absudité. Conclure .

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) Soit f une fonction définie continue et même C^∞ sur $\mathbb{R}$.
On suppose de plus que $f(0)=0,\ f'(0)=0$ et $f(1)=1,\ f'(1)=0$

On va démontrer qu'il existe $c\in\,]0,1[$ tq $f'(c)=\dfrac{f(c)}{c}$

On considère la fonction ϕ définie par $\phi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

1. Étude en 0^+.

   On veut la limite de $\phi(x)$ **quand** $x\to 0^+$

   $$\phi(x)=\frac{f(x)}{x}$$

   Comme f est dérivable en 0, on a $f(x) \begin{aligned}[t] &= f(0)+f'(0)x+o(x)\\ &= 0+0x+o(x)\\ &= o(x)\end{aligned}$

   $$=\frac{o(x)}{x}=o(1)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$$

   Donc la fonction ϕ se prolonge 0, avec $\phi(0)=0$.

2. Comme la fonction ϕ est continue sur le segment $[0,1]$, alors ϕ est bornée et atteint ses bornes.

   Ainsi il existe M et $c\in[0,1]$ tel que $\forall\ x\in[0,1]\,,\ \phi(x)\leqslant \underbrace{M}_{\phi(c)}$.

3. On a $\phi(1)>\phi(0)$ donc 0 n'est pas le maximum de ϕ donc $c\neq 0$.

4. Comme f est dérivable en 1, on a $f(x)=f(1+h) \begin{aligned}[t] &= f(1)+f'(1)h+o(x)\\ &= 1+0h+o(h)=1+o(h)\end{aligned}$

   $$\text{Ainsi } Q(x)=\frac{\phi(x)}{\phi(1)}=\frac{\phi(1+h)}{1}=\frac{f(1+h)}{1+h}=\frac{1+o(h)}{1+h}=\frac{1[1+o(1)]}{1[1+o(1)]}=1[1+o(1)]\underset{h\to 0}{\longrightarrow}1$$

   OUPS la limite ne permet pas de justifier $Q(x)>1$ au voisinage....

   Il faudrait avoir mieux CàD plus d'info $\underset{h\to 0}{\longrightarrow}1^+$

   On va faire un DL avec 2 termes !!!!

   $$=\frac{f(1+h)}{1+h}$$

   $$\underset{h\to 0}{=}\frac{1+o(h)}{1+h}=[1+o(h)[1-h+o(h)]]=1-h+o(h)$$

   Donc quand $x\to 1^-$, on a $h<0$ donc $1-h\to 1^+$ quand $h\to 0^-$

   Conclusion : au voisinage 1^-, on a $\phi(x)>1=\phi(1)$ au voisinage de 1^-
   donc $x=1$ n'est pas le maximum de ϕ sur $[0,1]$ ainsi $c\neq 1$.

5. La fonction ϕ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et c, le maximum global de ϕ, n'est pas une borne

   Conclusion $\phi'(c)=0$

   $$\iff \ldots \iff f'(c)=\frac{f(c)}{c}=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}$$

   Interprétation géométrique.

   On a $f'(c)$ la pente de la tangente de la fonction f en c est égale à la pente de la corde entre $(0,0)$ et $(c,f(c))$
   CàD la tangente en $x=c$ passe par $(0,0)$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Démontrer que f est solution sur $[0,1[$ de l'équation différentielle : $(1-x^2)\,y' = x\,y$.
   La fonction est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1]$

   $$\text{et } \forall\, x \in [0,1[,\ f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] = [h(u)]' = (-2x)\,\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2} = \frac{-x}{1-x^2}f(x).$$

   Donc f est bien solution de l'équation différentielle : $(1-x^2)\,y' = x\,y$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dérive n fois l'équation différentielle, en déduire une relation
   Comme $(1-x^2)\,f' = x\,f$, on a avec Leibniz

   $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{\left[(1-x^2)\right]^{(k)}}_{=0 \quad Si\ k\geqslant 3}\left[f'\right]^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{[(x)]^{(k)}}_{=0 \quad Si\ k\geqslant 2}[f]^{(n-k)}$$

   $$(1-x^2)f^{(n+1)} + n(-2x)f^{(n)} + \binom{n}{2}(-2)f^{(n-1)} = (x)f^{(n)} + n(1)f^{(n-1)}$$

   $$\boxed{\text{Ainsi on a sur } [0,1[,\ (1-x^2)f^{(n+1)} = (2n+1)x\,f^{(n)} + n^2 f^{(n-1)}}$$

3. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1[,\ \ f^{(n)}(x) \geqslant 0$.
   On fait avec une récurrence à 2 étages $H < n >$: $\forall\ x \in [0,1[,\ \ f^{(n)}(x) \geqslant 0$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Montrer (admettre) que g est définie sur $]-1,+\infty[$.

   On peut calculer le nombre $g(x)$ Si la fonction $\underbrace{t \longmapsto \dfrac{f(t)}{1+x\sin t}}$ est continue sur $[0, {}^{\pi}/_{2}\,]$

   Lorsque $x > -1$, on a sur $[0, {}^{\pi}/_{2}\,]$, $1 + x\sin t > 1 - 1 = 0$.

   Ainsi pour $x > -1$ le nombre $g(x)$ se calcule bien.

2. On suppose dans cette question que : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(t) = \cos t$. Calculer $g(x)$.

   On suppose dans cette question que : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(t) = \cos t$.

   On a $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1+x\sin(t)}dt = \int_0^{\pi/2} \frac{u'}{u}dt$

3. On suppose dans cette question que : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(t) = \sin(2t)$.

   on a
$$g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2t)}{1+x\sin(t)}dt = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{1+x\sin(t)}dt$$

   On fait je changement de variable $u = \sin(t)$

   Puis on décompose en éléments simples la fraction

4. Pour tout $(x,y) \in]a,+\infty[^2$, on a
$$\begin{aligned}
\left|g(x) - g(y)\right| &= \left|\int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x\sin t}dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+y\sin t}dt\right| \\
&\leqslant \int_0^{\pi/2} \left|f(t)\frac{(y-x)\sin(t)}{(1+x\sin t)(1+y\sin t)}\right| dt \\
&\leqslant \int_0^{\pi/2} |f(t)|\,\frac{|y-x|\,|\sin(t)|}{(1+x\sin t)(1+y\sin t)}dt \\
&\leqslant |y-x| \underbrace{\int_0^{\pi/2} |f(t)|\,\frac{|\sin(t|}{(1+a)(1+a)}dt}_{=K}
\end{aligned}$$

   La fonction est K-lipschitzienne donc continue sur $]a,+\infty[$

   Ainsi *la fonction g est continue sur* $]-1,+\infty[$

5. Montrer que g est décroissante sur $]-1,+\infty[$.

   Pour $x > y$, on a
$$\begin{aligned}
g(x) - g(y) &= \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x\sin t}dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+y\sin t}dt \\
&\leqslant \underbrace{(y-x)}_{<0} \int_0^{\pi/2} \underbrace{f(t)\frac{\sin(t)}{(1+x\sin t)(1+y\sin t)}}_{\geqslant 0 \quad \textit{sur } [0, {}^{\pi}/_{2}\,]} dt \leqslant 0
\end{aligned}$$

   Donc la fonction g est décroissante sur $]-1,+\infty[$.

6. Limite de g en $+\infty$.

   (a) La fonction f est continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   (b) Soit M un majorant de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\varepsilon > 0$.

   Pour $x > 0$, on a
$$\begin{aligned}
0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x\sin t}dt &= \int_0^{\varepsilon} \frac{f(t)}{1+x\sin t}dt + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x\sin t}dt \\
&\leqslant \int_0^{\varepsilon} \frac{M}{1+0}dt + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{M}{1+x\sin(\varepsilon)}dt \\
&\leqslant M\varepsilon + \frac{M}{(1+x\sin\varepsilon)}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \\
&\leqslant M\varepsilon + \frac{M\pi}{2(1+x\sin\varepsilon)}
\end{aligned}$$

(c) On conclut à la mode Césaro que $g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

Solution de l'exercice 6 **(Énoncé)**

1. On doit démontrer que $A \Rightarrow [B \text{ ou } C]$. On sait que

$$\begin{aligned}[A \Rightarrow (B \text{ ou } C)] \quad &\Leftrightarrow \quad [(A \text{ et } nonB) \Rightarrow C] \\ &\Leftrightarrow \quad [(A \text{ et } nonC) \Rightarrow B] \\ &\Leftrightarrow \quad [(nonB \text{ et } nonC) \Rightarrow nonA] \text{ contraposée.}\end{aligned}$$

   On a faire la contraposé, i.e. $[(nonB \text{ et } nonC) \Rightarrow nonA]$.
   On suppose donc que

$$[\exists x_0 \in [0,1]\,,\ f(x) \leqslant g(x)] \quad \text{ou bien} \quad [\exists y_0 \in [0,1]\,,\ f(x) \geqslant g(x)]\,.$$

   On doit démontrer que

$$\exists\, c \in [0,1]\,,\ f(c) = g(c)$$

   On introduit la fonction $\phi : x \to f(x) - g(x)$ et on lui applique le thm des V.I. sur $[x_0, y_0]$

2. La fonction $\phi : x \to f(x) - g(x)$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc bornée et atteind ses bornes, ainsi

$$\exists \alpha \in [a,b] \text{ tel que } \forall\, t \in [a,b]\,,\ \phi(x) = f(x) - g(x) \geqslant \phi(\alpha)$$

   Ainsi $M = \phi(\alpha) > 0$ convient

3. On montre par récurrence que récurence

$$H\langle n\rangle : |\forall x \in [0,1]\,,\ f^n(x) \geqslant g^n(x) + nM$$

   $\rightarrow$ $H\langle 1\rangle$ est vraie. C'est la question précédente.

   $\rightarrow$ $H\langle n\rangle \Rightarrow H\langle n+1\rangle$. Il suffit de "dérouler" les calculs

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) \quad &= \quad f^n(f(x)) \\ &\qquad \text{On applique } H\langle n\rangle \text{ car } f(x) \in [0,1] \\ &\geqslant \quad g^n(f(x)) + nM \\ &\qquad \text{Comme } f \circ g = g \circ f\text{, on a } f \circ g^n = g^n \circ f \\ &\geqslant \quad f(g^n(x)) + nM \\ &\qquad \text{On applique } H\langle 1\rangle \text{ car } g^n(x) \in [0,1] \\ &\geqslant \quad g(g^n(x)) + M + nM \end{aligned}$$

   Donc $H\langle n+1\rangle$ est vraie.

4. On a donc

$$\forall\, n, \quad nM \leqslant f^n(x) - g^n(x) \leqslant 1 - 0$$

   quand $n \to +\infty$ c'est absude.

5. Ainsi $[\forall\, x \in [0,1]\,,\ f(x) \neq g(x)]$ est faux, donc

$$\exists\, x_0 \in [0,1]\,,\ f(x_0) = g(x_0)\,.$$