Dérivabilité, $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$

Dans ce chapitre les ensembles $\mathscr{D}$ de définition seront des intervalles ou des réunions finies ou infinies d'intervalles. par exemples :

$$\mathscr{D}=\mathbb{R},\ \mathscr{D}=\mathbb{R}^*,\ \mathscr{D}=]0,1[\cup]1,\infty[\text{ ou } \mathscr{D}_{\tan}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}-k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[.$$

1 Dérivable et $\mathscr{C}^1$.

1.1 Définitions.

Définition 1. Taux de variation, dérivée.

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $a\in\mathscr{D}$.

> La fonction taux de variation entre a et x, noté $\mathcal{T}aux_a(x)$,
C'est la pente de la corde entre les points $(a,f(a))$ et $(x,f(x))$,

$$\text{On a donc } \forall x\in\mathscr{D} \text{ et } x\neq a,\ \mathcal{T}aux_a(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

> On dit que f est dérivable en a
Ssi le taux de variation en a admet une limite finie quand $x\to a$.

$$\text{On a donc } f'(a) \underset{def}{=} \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Cette limite est appelé le nombre dérivée en a et on le note $f'(a)$.
On définit de même les notions de dérivée à droite $f'_d(a)$ et à gauche $f'_g(a)$.

> On dit que la fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}$
Ssi f est dérivable en tout point de $\mathscr{D}$.
La fonction $f' : x\longmapsto f'(x)$ est appelé la dérivée de f.

> Lorsque la fonction f est dérivable et que la fonction f' est continue,
On dit que la fonction f est continument dérivable, notée $\mathscr{C}^1$.

Interprétation physicienne de $f'(t)$.

Si $f(t)$ désigne l'abscisse d'un point mobile sur un axe (ou même dans le plan) en fonction du temps t,
Alors $f'(t)$ est la vitesse instantanée du point à l'instant t.

Théorème 2.

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a\in\mathscr{D}$.

On suppose que f est définie à gauche et à droite de a.

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche et à droite}\\ ET\\ f'_g(a)=f'_d(a)\end{cases}$$

Définition 3. Interprétation géométrique

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathscr{D}$.

> Lorsque f est dérivable en a.
La fonction f admet une tangente en a d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

> Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, alors la fonction f n'est pas dérivable en a.
Cependant la fonction f admet une tangente verticale en a.

> Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'existe pas, CàD "Chaotique" , alors la fonction f n'est pas dérivable en a.
Et la fonction n'a pas de tangente en $(a, f(a))$.

1.2 Dérivable et DL

Théorème 4. Continue, Dérivable et DL

Soit f une fonction définie de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
Soit $a \in \mathscr{D}$ ainsi le nombre $f(a)$ se calcule.

> **Continue et DL**
la fonction f est continue en a Ssi $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$
Ssi $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + o(1)$
Ssi $f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + o(1)$

> **Dérivable et DL**
la fonction f est dérivable en a Ssi $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a)$
Ssi $f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + f'(a)\,h + o(h)$ (Taylor-Young version dérivable)

Application : Dérivable $\Longrightarrow$ continue

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathscr{D}$.

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Attention : la réciproque est fausse,
la fonction valeur absolue est continue en 0 mais non-dérivable en 0.

Démonstration : Pour tout $a \in \mathscr{D}$. On suppose que f est dérivable en a, donc d'après Taylor-Young version dérivable,
on a $f(x) = f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + f'(a)\,h + o(h)$
ainsi on a $f(x) = f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + f'(a)\,h + o(h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(a) + 0 + 0 = f(a)$. Donc f est continue en a.

1.3 Formulaire classiques.

Théorème 5. CL, Produit, Quotient

Soit f et g deux fonctions de $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a \in \mathscr{D}$.
On suppose que f et g sont dérivables en a

On a alors

> **Combinaison Linéaire.** Pour tout λ, μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et

$$[\lambda f + \mu g]'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

> **Produit.** La fonction fg est dérivable en a et de plus

$$[fg]'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$$

> **Quotient.** Si $g(a) \neq 0$, la fonction ${}^{f}/_{g}$ est dérivable en a et de plus

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}$$

Démonstration : On va calculer la limite du taux.

> **Combinaison Linéaire.** On étudie le $\mathcal{T}aux_a(x)$ pour la fonction $\lambda f + \mu g$

$$\mathcal{T}aux_a(x) = \frac{[\lambda f + \mu g](x) - [\lambda f + \mu g](a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \mu \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} \underbrace{\lambda f'(a) + \mu g'(a)}_{C'est\ [\lambda f + \mu g]'(a)}$$

Donc la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et on a bien la formule.

> **Produit.** On étudie le $\mathcal{T}aux_a(x)$ pour la fonction fg

$$\mathcal{T}aux_a(x) = \frac{[fg](x) - [fg](a)}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \underbrace{g(x)}_{\to g(a)} + \underbrace{f(x)}_{\to f(a)} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to g'(a)}$$

$$\xrightarrow[x \to a]{} \underbrace{f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)}_{C'est\ [fg]'(a)}$$

la fonction fg est dérivable en a et on a bien la formule.

> **Quotient simple.** Si $g(a) \neq 0$,

alors la fonction ${}^{1}/_{g}$ est dérivable en a et de plus $\left[{}^{1}/_{g}\right]'(a) = {}^{-g'(a)}/_{g^2(a)}$

On étudie le $\mathcal{T}aux_a(x)$ pour la fonction ${}^{1}/_{g}$

$$\mathcal{T}aux_a(x) = \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \frac{-1}{g(x)g(a)} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{-1}{g^2(a)}.g'(a)$$

Donc la fonction ${}^{1}/_{g}$ est dérivable en a et on a la formule.

> **Quotient complet.**

On écrit que ${}^{f}/_{g} = f.\left({}^{1}/_{g}\right)$ et on utilise la formule du produit puis on réduit au même dénominateur.

Fini □

Théorème 6. Composée

Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathscr{A}_f$ et $g : \mathscr{D}_g \to \mathscr{A}_g$ deux fonctions et $a \in \mathscr{D}_f$ avec $b = f(a)$.
On suppose que $\mathscr{A}_f \subset \mathscr{D}_g$ ainsi la composée $g \circ f$ existe
On suppose que f est dérivable en a et que g est dérivable en $b = f(a)$

Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a
et de plus $[g \circ f]'(a) = f'(a).g'(b) = f'(a).g'(f(a))$

Démonstration : La démonstration avec le taux parait simple mais il est délicat de justifier qu'insidieusement, on ne divise pas 0.
Mais on va quand même étudier le $Taux_a(x)$ pour la fonction $g \circ f$

$$Taux_a(x) = \frac{[g\circ f](x) - [g\circ f](a)}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} . \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Je note $\square = f(x)$.
Comme f est continue, $\square = f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a) = b$

$$= \underbrace{\frac{g(\square) - g(b)}{\square - b}}_{\to g'(b)} . \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \xrightarrow[x\to a]{} \underbrace{g'(b)f'(a)}_{C'est\ [g\circ f]'(a)}$$

Donc la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et on a la formule.

Fini $\square$

Les observateurs attentifs noteront que l'on a divisé par $f(x) - f(a)$ et que rien n'assure que qu'on ne divise pas par 0. Pour surmonter cette difficulté, on peut discuter selon que $f'(a) = 0$ ou $\neq 0$, utiliser les DL ou recopier Bourbaki.

Théorème 7. Dérivabilité des fonctions classiques

On sait que les fonctions classiques sont dérivables sur leur ensemble $\mathscr{D}$ de définition, (sauf $[\sqrt{x}]$, arcsin et arccos), ainsi on déduit des théorèmes précédents que

Lorsque une fonction est fabriquée à l'aide des fonctions usuelles et des opérations classiques
Alors la fonction est dérivable sur $\mathscr{D}$, ainsi $\mathscr{D}' = \mathscr{D}$.

1.4 Bijection Réciproque.

Théorème 8. Bijection réciproque

Soit I un intervalle et f une fonction bijective, dérivable de I sur J.

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ réalise une bijecton } I \text{ sur } J \\ f \text{ est dérivable sur } I \\ \forall\, t \in I,\ f'(t) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f^{-1} \text{ la bijection réciproque} \\ \quad \text{est dérivable sur } J. \end{array}$$

De plus on sait calculer $\left[f^{-1}\right]'$.

Plus précisément : Soit $a \in I$ et $f(a) = b \iff a = f^{-1}(b)$

> Si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} la bijection réciproque est dérivable en $b = f(a)$ et de plus

$$[f^{-1}]'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

> Si $f'(a) = 0$ alors f^{-1} la bijection réciproque n'est pas dérivable en $b = f(a)$.
Par contre la fonction f^{-1} admet une tangente verticale en $(b, f^{-1}(b))$.

Démonstration : On suppose que $f'(a) \neq 0$. On étudie le $Taux_b(y)$ pour la fonction f^{-1}

$$Taux_b(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}$$

Je note $\square = f^{-1}(y)$.
Comme f^{-1} *est continue,* $\square = f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to b]{} f^{-1}(b) = a$

$$= \frac{\square - a}{f(\square) - f(a)} \xrightarrow[y\to b]{} \frac{1}{f'(a)}$$

Si $f'(a) = 0$, alors le même calcul donne $Taux_b(y) \xrightarrow[y\to b]{} \infty$ donc la fonction n'est pas dérivable et la droite tangente est verticale.

Fini $\square$

1.5 Le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$.

non, Non, NON : $\mathscr{D}'$ n'est pas l'ensemble de définition de f'.

Théorème 9.

Le nombre $f'(t)$ se calcule avec le formulaire, **lorsque ce nombre existe.**
Il y a donc 2 situations.

> Situation générale.

Lorsque la fonction f est fabriquée avec les fonctions usuelles et les opérations classiques

Alors je connais l'ensemble $\mathscr{D}'$

et, sur $\mathscr{D}'$, on peut utiliser le formulaire pour calculer $f'(t)$.

> Situation exceptionnelle.

Lorsque le point a est est un point exceptionnel

Alors on utilise le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

Théorème 10. Théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$

Soit f une fonction définie sur $]a,b]$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ une fonction } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]a,b] \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to a} f'(x) = A' \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ Alors la fonction f se prolonge en a
ET la prolongement est $\mathscr{C}^1$ en a et donc sur $[a,b]$.

Ainsi On a $f(a) = A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $f'(a) = A' = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$

Généralisation : Le théorème est encore vrai quand $A' = \pm\infty$.

La conclusion est alors :

la fonction f se prolonge en a avec $f(a) = A \in \mathbb{R}$
mais le prolongement n'est pas dérivable en a. car $f'(a) = \infty$ est interdit!!!
Cependant le graphe de f admet une tangente verticale en a.

Subtilité :

> On prolonge la fonction en a donc on choisit que $f(a) = A$ "pour que le graphe n'est plus de petit trou".

> Par contre, c'est le théorème qui impose que la fonction est dérivable,
CàD je ne choisis pas que $f'(a) = A'$, je suis obligé de l'avoir et cela m'arrange bien.

Pour démontrer le Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, il faut utiliser l'égalité des AF voir la fin du prochain chapitre.

Paradoxal mais vrai.

Il existe des fonction f définie en a, continue en a, dérivable en a mais qui ne sont pas $\mathscr{C}^1$ en a.

2 Dérivée d'ordre supérieur.

2.1 Définition.

Soit une fonction réelle f définie sur un intervalle I

> Par convention : $f^{(0)} = f$.

> Si f est dérivable sur cet intervalle I. La fonction dérivée f' est alors définie sur I. On peut alors étudier les propriétés de dérivabilité de f', et, en cas de dérivabilité,

> On obtient la dérivée seconde f'' (dérivée de la dérivée). On peut continuer de la sorte tant que c'est possible.

Définition 11. Dérivée d'ordre supérieur

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que f est n-fois dérivable si on peut dériver f sur I, n fois de suite.
Cela définit la fonction $f^{(n)}$ que l'on nomme dérivée n-ième de f.

`Plus précisément, il s'agit d'une définition par récurrence`, fondée sur :
Si $f^{(n)}$ existe sur I et est dérivable alors on définit la dérivée (n+1)-ième par

$$f^{(n+1)} = [f^{(n)}]'$$

Définition 12. Classe $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

> Une fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I si elle est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue.

Ainsi $f \in \mathscr{C}^n$ alors les fonctions $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ existent et sont continues.

On note $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ de I à valeurs dans $\mathbb{R}$

> On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc si f est infiniment dérivable.

Ainsi $f \in \mathscr{C}^\infty$ alors les fonctions $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$.. existent et sont continues.

On note $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de I à valeurs dans $\mathbb{R}$

2.2 Opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$.

Théorème 13.

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et I un intervalle.

Soit f une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On a équivalence.

$$f \text{ est } \mathscr{C}^{n+1} \iff \begin{pmatrix} f \ est \mathscr{C}^n \\ et \\ f^{(n)} \ est \mathscr{C}^1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} f \ est \mathscr{C}^1 \\ et \\ f' \ est \mathscr{C}^n \end{pmatrix}$$

De plus on a alors $f^{(n+1)} = [f^{(n)}]' = [f']^{(n)}$

Démonstration : C'est évident vu la définition par récurrence de $f^{(n)}$.

Théorème 14. Opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et I un intervalle.
Soit f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On suppose que les fonctions f et g sont $\mathscr{C}^n$ sur I.

On a alors

> **Combinaison Linéaire.** On suppose que les fonctions f et g sont $\mathscr{C}^n$ sur I,
Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est $\mathscr{C}^n$ sur I et de plus

$$[\lambda f + \mu g]^{(n)} = \lambda [f]^{(n)} + \mu [g]^{(n)}$$

> **Produit.** On suppose que les fonctions f et g sont $\mathscr{C}^n$ sur I,
Alors la fonction fg est $\mathscr{C}^n$ sur I et on a la formule de Leibniz

$$[fg]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [f]^{(k)} [g]^{(n-k)}$$

> **Quotient.** On suppose que les fonctions f et g sont $\mathscr{C}^n$ sur I et que g ne s'annule pas sur I,
Alors la fonction f/g est $\mathscr{C}^n$ sur I et par contre il n'y a pas de formule.

> **Composée.** On suppose que les fonctions f et g sont composables, CàD que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathscr{D}_g$ et sont $\mathscr{C}^n$.
Alors la fonction $g \circ f$ est $\mathscr{C}^n$ sur I.

> **Bijection réciproque.** On suppose que la fonction f réalise une bijection de $\mathscr{C}^n$ de I sur J et que f' ne s'annule pas sur I,
Alors la bijection réciproque f^{-1} est bijective de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

Démonstration : Pour les CL. On va démontrer par récurrence

$H<n>$: Si $f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ alors $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et la formule.

> $H<0>$? OK, une Combinaison Linéaire de fonction continue est continue.

> $H<n> \Rightarrow H<n+1>$?
On veut démontrer $H<n+1>$, donc on suppose que $f, g \in \mathscr{C}^{n+1}$

$\boxed{\text{On va montrer que : } h = \lambda f + \mu g \text{ est } \mathscr{C}^{n+1} \oplus \text{ la formule.}}$

On va utiliser : $\begin{pmatrix} h \text{ est } \mathscr{C}^1 \\ et \\ h' \text{ est } \mathscr{C}^n \end{pmatrix} \Longrightarrow h$ est $\mathscr{C}^{n+1}$.

> On sait que $f, g \in \mathscr{C}^{n+1} \Longrightarrow f, g \in \mathscr{C}^1$ et à cause de la théorie de la dérivabilité, on a alors : $h = \lambda f + \mu g$ est $\mathscr{C}^1$

> A cause de la théorie de la dérivabilité, on sait qu'alors : $h' = \lambda f' + \mu g'$.
On a $f, g \in \mathscr{C}^{n+1} \Longrightarrow f', g' \in \mathscr{C}^n$ et à cause de H<n>, on déduit que $h' = \lambda f' + \mu g' \in \mathscr{C}^n$.

Conclusion : $h = \lambda f + \mu g$ est $\mathscr{C}^{n+1}$

Enfin la formule est simple :

$$[\lambda f + \mu g]^{(n+1)} = h^{(n+1)} = [h']^{(n)} \underset{\text{On dérive le CL}}{=} [\lambda f' + \mu g']^{(n)} \overset{H<n>}{=} \lambda [f']^{(n)} + \mu [g']^{(n)} = \lambda f^{(n+1)} + \mu g^{(n+1)}$$

Fini □

Pour le produit et le quotient, on fait de même et la formule de Leibniz se démontre par récurrence de la même façon que pour les polynômes.

2.3 $\mathscr{C}^\infty$ et équation différentielle.

Théorème 15.
Soit f une fonction solution sur $\mathscr{D}$ de l'équation différentielle **normalisée**
par exemple : $1\,y' + 2x\sin(y) = 0$

Alors la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$.

Démonstration : Je fais la démonstration sur un exemple.
On suppose que la fonction f est une solution sur $\mathscr{D}$ de l'équation différentielle normalisée : $1\,y' + 2x\sin(y) = 0$

$$\boxed{\text{On va montrer que } f \text{ est } \mathscr{C}^\infty.}$$

`La démonstration est ressemble beaucoup à celles des théorèmes qui précèdent.`
On va démontrer par récurrence $H<n>$: f est de classe $\mathscr{C}^n$.

> $H<0>$? Comme f est solution d'une équation différentielle, elle est dérivable et donc continue. Donc $H<0>$ est vraie.

> $H<n> \Longrightarrow H<n+1>$?
On suppose que f est $\mathscr{C}^n$

$$\boxed{\text{On va montrer que : } f \text{ est } \mathscr{C}^{n+1}.}$$

On va utiliser : $\begin{pmatrix} f\ est\ \mathscr{C}^1 \\ et \\ f'\ est\ \mathscr{C}^n \end{pmatrix} \Longrightarrow f$ est $\mathscr{C}^{n+1}$

> Comme f est $\mathscr{C}^n$, elle est $\mathscr{C}^1$.

> De plus, on sait que $f' = -2x\sin(f)$

$$\left.\begin{array}{r} \text{la fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^n \\ \text{Les fonctions } [x] \text{ et Sinus sont } \mathscr{C}^\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow f' = -2x\sin(f)\ est\,\mathscr{C}^n.$$

Conclusion : f est $\mathscr{C}^{n+1}$ et donc $H<n+1>$ est vraie.

2.4 Le Théorème de prolongement $\mathscr{C}^n$.

Théorème 16. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^n$
Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ f une fonction définie sur $]a,b]$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ une fonction } \mathscr{C}^n \text{ sur }]a,b] \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \\ \lim\limits_{x\to a} f'(x) = A' \\ \lim\limits_{x\to a} f''(x) = A'' \\ \vdots \\ \lim\limits_{x\to a} f^{(k)}(x) = A''''''''' \in \mathbb{R} \\ \vdots \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ Alors la fonction f se prolonge en a
ET la prolongement est $\mathscr{C}^n$ en a donc sur $[a,b]$.

Ainsi on a $\forall\, k \in \{1,2,\dots,n\},\ f^{(k)}(a) = A''''' = \lim\limits_{x\to a} f^{(k)}(x)$

Démonstration : On commence par appliquer le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ à la fonction f.
> Puis on applique le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ à la fonction f' ainsi f' est $\mathscr{C}^1$ et donc le prolongement est $\mathscr{C}^2$.
> Puis on applique le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ à la fonction f'' ainsi ...... le prolongement est $\mathscr{C}^3$. Etc ....

3 Exercices.

Dérivable et $\mathscr{C}^1$

Exercice 1. Déterminer $\mathscr{D}$, l'ensemble de définition et $\mathscr{D}'$ l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes

1. $x \longmapsto \sqrt{x^2 - x^3}$
2. $x \longmapsto \arcsin(2x+1)$
3. $x \longmapsto \arcsin(x^2)$
4. $x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles $\mathscr{C}^1$

$$f : x \longmapsto \begin{cases} f(x) = (x-1)^2 & \text{Si } x > 1 \\ f(1) = 0 & \\ f(x) = (x-1)^3 & \text{Si } x < 1 \end{cases} \qquad g : x \longmapsto \begin{cases} g(x) = x^2 + x & \text{Si } x \geqslant 1 \\ & \\ g(x) = 1 + ax + bx^3 & \text{Si } x < 1 \end{cases}$$

Exercice 3. Montrer que les fonctions

$$\left[h : x \longmapsto \frac{\ln(1-2x) + 2x}{x^2}\right], \ \left[h : x \longmapsto \frac{x}{e^x - 1}\right] \text{ ou } \left[h : x \longmapsto \frac{x}{\ln(1+x)}\right]$$

se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^1$ en 0.

Fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$

Exercice 4. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(0) = f(0) \quad et \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \ F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

1. Montrer que la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$
2. Justifier que la fonction F est C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
3. Donner un DL en 0 de h puis de $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ et de F.
   En déduire que F continue en 0. (complément est-elle $\mathscr{C}^1$ en 0)

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sin(t)}\,dt$$

1. Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer f'
2. Étude la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t}$
   (a) Montrer que la fonction h est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
   (b) Soit H une primitive de h.
   Justifier que H existe et que $H(x) \underset{x\to 0}{=} H(0) + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$
3. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln(2)$

$\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$

Exercice 6.

1. Calculer les dérivées k-ième pour des expressions suivantes x^n, 2^x, $\dfrac{1}{x+1}$, xe^{2x}.
2. Calculer la dérivée n-ième pour de $\dfrac{e^{2x}}{x+1}$.
3. Décomposée en éléments simples puis calculer la dérivée n-ième pour de $\dfrac{1}{x^2+1}$.

Exercice 7.

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \left[e^{\sqrt{3}x}\sin(x)\right]^{(n)} = 2^n e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x + n\dfrac{\pi}{6}\right)$.
3. Retrouver les deux résultats précédents avec les complexes.

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$

> Exprimer f', f'' en fonction de H_1 et H_2.

> Généraliser en exprimant $f^{(n)}$ en fonction H_n.

Exercice 9. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$.

1. Justifier que f est $\mathscr{C}^\infty$.
   Montrer que pour tout n, il existe un polynôme P_n tel que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)} = P_n(x)\, e^{x^2}$
2. Former une équation différentielle simple vérifier à f.
   En déduire une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2}.
3. En combinant les deux questions précédente,
   trouver une équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par P_n.

Exercice 10. Montrer, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = (-1)^n x^{-n-1} e^{\frac{1}{x}}.$$

A noter : l'entier n intervient comme dérivée $n^{\text{ième}}$ et aussi dans la fonction qui est dérivée.

Théorème de prolongement $\mathscr{C}^n$ ou $\mathscr{C}^\infty$

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^{n+1} & Si\ x \geqslant 0 \\ 0 & Si\ x < 0 \end{cases}$

Montrer que f est $\mathscr{C}^n$ mais pas $\mathscr{C}^{n+1}$.

Exercice 12. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{1/x^2}$.

1. Justifier que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
   Montrer que pour tout n, il existe un polynôme P_n tel que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{1/x^2}$.
2. Montrer que la fonction f se prolonge en 0 et que le prolongement est $\mathscr{C}^\infty$.