Rolle et copains.

1 Extremum et point critique.

Définition 1.
Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Point Critique.
On dit que a est un point critique de f Ssi

$$f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = 0.$$

Minimum global/local.
On dit que f admet un minimum global sur $\mathscr{D}$ en a

$$\text{Ssi sur } I, \text{ on a } f(x) \geqslant f(a) \iff f(x) - f(a) \geqslant 0$$

On dit que f admet un minimum local en a

$$\text{Ssi au voisinage de } a, f(x) \geqslant f(a) \iff f(x) - f(a) \geqslant 0$$

On définit de même un maximum global et local.

Extremum : Un extremum est un maximum ou un minimum.

Théorème 2. Lien entre extremum et point critique
Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{c} a \text{ est un extremum local de } f \\ f \text{ est dérivable en } a \\ a \text{ n'est pas une borne de } I \end{array}\right\} \implies f'(a) = 0$$

`Attention : Toutes les hypothèses sont indispensables.`

Démonstration : Les hypothèses assurent que

> Comme a n'est pas une borne I
$\implies$ donc les voisinages de a sont de la forme $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset I$ avec $\varepsilon > 0$

> Comme a est un maximum local donc
$\implies$ Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon],\ f(x) \leqslant f(a)$

> Comme f est dérivable en a,
$\implies$ on a $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ (d'après le théorème de Taylor-Young)

Pour la démonstration, je suppose que a est un maximum.

Il y a trois possibilités : Soit $f'(a) > 0$, Soit $f'(a) < 0$, Soit $f'(a) = 0$

> On va montrer que $f'(a) > 0$ est absurde

Pour la pédagogie, on va suppose en plus que $f(a) > 0$

On fait un dessin avec $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$.

On constate et $\boxed{\text{on va démontrer : } \exists \eta > 0,\ \forall x \in]a, a+\eta],\ f(x) > f(a)}$

On considère $Q(x) = \dfrac{f(x)}{f(a)}$

Comme f est continue, on a $Q(x) = \dfrac{f(x)}{f(a)} \xrightarrow[x\to a^+]{} \dfrac{f(a)}{f(a)} = 1$

Ceci ne permet pas des conclure car l'objectif est de montrer $Q(x) \underset{Strict}{>} 1$

On fait un DL affin de justifier que $Q(x) = \dfrac{f(x)}{f(a)} \xrightarrow[x\to a^+]{} 1^+$

$$Q(x) = \frac{f(x)}{f(a)} = \frac{f(a+h)}{f(a)} \underset{x\to a}{=} \frac{f(a) + f'(a)h + o(h)}{f(a)} = 1 + \frac{f'(a)}{f(a)}h + o(h)$$

Comme $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$, on a $\dfrac{f'(a)}{f(a)}h$ donc $Q(x) = \dfrac{f(x)}{f(a)} \xrightarrow[x\to a^+]{} 1^+$

Conclusion : D'après la définition de $Q(x) = \dfrac{f(x)}{f(a)} \xrightarrow[x\to a^+]{} 1^+$

On a $\exists \eta > 0,\ \forall x \in]a, a+\eta],\ f(x) > f(a)$

Comme on a supposé que $f(x) \leqslant f(a)$ C'est OUPS!!!!!

> On va montrer que $f'(a) < 0$ est absurde

Comme $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$,

$$\left.\begin{array}{c} f(a+h) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)h \\ f'(a)h > 0 \text{ en } a^- \end{array}\right\} \Longrightarrow f(a+h) - f(a) > 0 \textit{ Au voisinage de } a^-$$

Donc a n'est pas une maximum local. OUPS!!!!

Donc $f'(a) = 0$, c'est la seule possibilité non-absurde

Application classique Attention,ce n'est pas un théorème donc qu'il faut refaire

Soient f et g deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$

$$\left.\begin{array}{c} f \leqslant g \text{ sur } I \\ f(x_0) = g(x_0) \\ x_0 \text{ n'est pas une borne de } I \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$$

Démonstration : La démonstration **fausse** à ne surtout pas écrire c'est :

Comme $f(x_0) = g(x_0)$ et que f est dérivable, on dérive l'égalité donc $f'(x_0) = g'(x_0)$

C'est faux car on dérive l'égalité, c'est $\dfrac{d}{dx}[f(x_0)] = \dfrac{d}{dx}[g(x_0)]$

et $\dfrac{d}{dx}[f(x_0)] = \mathscr{O}$!!!!!

Pour justifier que $f'(x_0) = g'(x_0)$: il faut appliquer le théorème précédent à la fonction $h = g - f$ qui toujours positive et comme $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$ elle admet en x_0 un minimum (global) qui n'est pas une borne ainsi $h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) = 0$

2 Théorèmes de Rolle.

2.1 Théorème de Rolle.

Théorème 3. Le théorème de Rolle

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{c} f \textit{ est continue sur } [a,b] \\ f \textit{ est dérivable en }]a,b[\\ f(b) = f(a) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \textit{Il existe } c \in]a,b[\text{ }_{\textit{Pas forcément unique}} \\ \textit{tel que } f'(c) = 0 \end{array}$$

`Attention : Toutes les hypothèses sont indispensables.`
`Le théorème est faux pour les fonctions à valeurs dans ℂ`

Démonstration : Démonstration du théorème de Rolle.

la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ donc elle est Majorée/minorée et on a de plus ....

> Situation $f(a) = f(b) \neq M$. Comme M est atteint, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$.
On a maintenant

$$\left.\begin{array}{c} c \textit{ est un maximum (global) de } f \\ f \textit{ est dérivable en } c \in]a,b[\\ c \textit{ n'est pas une borne de } [a,b] \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(c) = 0$$

> Situation $f(a) = f(b) \neq m$. On fait de même.

> Situation $f(a) = f(b) = m = M$. On a $\forall x \in [a, b], \ m \leqslant f(x) \leqslant M$
donc la fonction f est constante sur $[a, b]$ et donc $f' = 0$ sur $[a, b]$. ainsi $c = \dfrac{a+b}{2}$ convient.

Fini □

Interprétation géométrique de Rolle dans $\mathbb{R}$

Le théorème provient du fait comme f est continue, elle admet forcément au moins un extremum global sur le segment $[a; b]$
donc en ce point la tangente est horizontale.
Ceci se conçoit aisément à l'aide d'un Bô dessin.

Interprétation physicienne de Rolle dans $\mathbb{R}$

On suppose que $f(t)$ désigne l'abscisse d'un point mobile sur la droite $\mathbb{R}$ en fonction du temps t.

> L'hypothèse $f(a) = f(b)$ veut signifie que :
le point mobile par d'un point donné au temps $t = a$ et revient à ce point au temps $t = b$.

> Le théorème de Rolle nous dit que
la vitesse de ce point mobile s'annule à un instant $t = c$ compris entre $t = a$ et $t = b$

Il est "évident" qu'au moment c où le point mobile fait demi-tour
pour revenir à son départ, on a $f'(c) = 0$

Pourquoi Rolle est faux dans $\mathbb{C}$

On suppose que $f(t)$ désigne un point mobile dans le plan complexe $\mathbb{C}$ en fonction du temps t.

> L'hypothèse $f(a) = f(b)$ veut signifie que :
le point mobile par d'un point donné au temps $t = a$ et revient à ce point au temps $t = b$.

> Mais dans le plan, on n'est pas obligé de faire demi tour pour revenir au départ !
Comme on dit, on peut faire un tour.

2.2 Rolle généralisé et Rolle itéré.

Théorème 4. Théorème de Rolle généralisé

Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{c} f \textit{ est continue sur } \mathbb{R} \\ f \textit{ est dérivable en } \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \textit{Il existe } c \in \mathbb{R} \\ \quad \textit{tel que } f'(c) = 0 \end{array}$$

On peut remplacer $\mathbb{R}$ par $[0,+\infty[$, on doit alors supposer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$

Démonstration : Soit f une fonction vérifiant les hypothèse du théorème.

On va appliquer Rolle à la fonction h définie par $h(x) = f(\tan x)$

$$\text{On peut calculer } h(x) \text{ Ssi } \left\{\begin{array}{l} \textit{On peut calculer } \tan(x) \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\oplus k\pi \\ \\ \tan(x) \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Donc f est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

De plus on a

$$\left.\begin{array}{l} \tan(x) \xrightarrow[x\to\pi/2^-]{} +\infty \\ \\ f(X) \xrightarrow[X\to+\infty]{} \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow h(x) = f(\tan x) \xrightarrow[x\to\pi/2^-]{} \ell$$

Donc h se prolonge en $\pi/2$ avec $h(\pi/2) = \ell$ et avec ce choix h est bien continue en $\pi/2$.

On prolonge de même h en $-\pi/2$ avec $f(-\pi/2) = \ell$.

La fonction h ainsi prolongée vérifie les hypothèses du théorème de Rolle

$$\text{ainsi il existe } a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } h'(a) = 0$$

Enfin $h'(a) = \underbrace{(1+\tan^2(a))}_{\neq 0} f(\tan(a)) = 0$ donc $c = \tan(a) \in \mathbb{R}$ convient.

Théorème 5. Théorème de Rolle itéré

Soit $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{c} f \textit{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \\ f \textit{ est dérivable en } \mathbb{R} \\ \\ f(a_0) = f(a_1) = \ldots = f(a_n) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \textit{Alors } f' \textit{ s'annule au moins } (n-1) \textit{ fois} \\ \textit{CàD Il existe } b_1 < b_2 < \ldots < b_n \\ \textit{tel que } f'(b_1) = f'(b_2) = \ldots = f'(b_n) = 0 \end{array}$$

De plus il y a entrelacement, CàD

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < \ldots < a_{n-1} < b_n < a_n$$

Application très classique et très utile

f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $I_{intervalle}$ et s'annule $(n+1)$ fois

alors $f^{(n)}$ s'annule aune fois (ou plus) sur I.

Démonstration : Soit f une fonction vérifiant les hypothèse du théorème.

La fonction f vérifie sur chacun des intervalles $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$,..., $[a_{n-1}, a_n]$, les hypothèses du théorème de Rolle.

> On applique sur chacun de ces intervalles le théorème de Rolle, ainsi

$$\text{Pour tout } k \in \{1, \ldots, n\}, \text{ il existe } b_k \in]a_{k-1}, a_k[\text{ tel que } f'(b_k) = 0$$

> L'entrelacement est évident car $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et $a_{k-1} < b_k < a_k$.

> L'application très classique et très utile se démontre en appliquant à f' le théorème de Rolle itéré ainsi f'' s'annule au moins $(n-2)$ fois puis on applique Rolle itéré à f'' ....etc ....

2.3 Une application classique et plus difficile.

Énoncé. Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

$$\text{Montrer que : } \forall x \in [a,b], \text{ il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f(x) = f''(c)\frac{(x-a)(x-b)}{2}$$

Indication : On pourra utiliser la fonction h définie par $h(t) = f(t) - K\frac{(t-a)(t-b)}{2}$ où K est une constante à choisir

Réponse.

L'indication dit qu'il faut utiliser la même démarche que pour démontrer l'EAF.
De plus on doit montrer "il existe " avec du f'' et du = Donc c'est du Rolle itéré 2 fois

Idée : Un mélange entre EAF et Rolle itéré!!!

Situation $x = a$ ou $x = b$. Pour tout c, on a $0 = 0$ donc $c = \dfrac{a+b}{2}$ convient.
Situation $x \in]a,b[$.

On va utiliser le théorème de Rolle itéré appliquer à la fonction h définie par

$$h(t) = f(t) - K\frac{(t-a)(t-b)}{2}$$

> Je choisis K tel que $h(b) = h(a) = h(x)$.
On a $h(a) = h(b) = 0$ et $h(x) = f(x) - K\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$.
Comme $x \in]a,b[$, on a $(x-a)(x-b)/2 \neq 0$

$$\text{On trouve } K = \frac{f(x)}{\frac{(x-a)(x-b)}{2}}$$

> La fonction h vérifie les hypothèses de l'application du théorème de Rolle itéré
Ainsi il existe $c \in]a,b[$ tel que $h''(c) = 0$.

> Synthèse et conclusion :

D'une part : On calcule h'' ainsi $h''(c) = 0 \iff f''(c) = K$.
D'autre part : $K = \dfrac{f(x)}{\frac{(x-a)(x-b)}{2}}$

$$\text{Conclusion : } f(x) = f''(c)\frac{(x-a)(x-b)}{2}$$

Remarque : Le nombre c dépend de x, c'est clair surtout car f n'est pas un polynôme.
Donc on devrait noter c_x plutôt que c.

Fini □

3 Accroissements finis.

3.1 L'égalité des Accroissements finis.

Théorème 6. L'égalité des Accroissements finis ou EAF ou TAF

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} f \textit{ est continue sur } [\text{a,b}] \\ \\ f \textit{ est dérivable en }]\text{a,b}[\end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{Il existe } c \in]a,b[\quad \textit{tel que } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Remarque : $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ peut s'écrire $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

Démonstration : On va utiliser le théorème de Rolle appliquer à la fonction h définie par

$$h(x) = f(x) - f(a) - K(x-a) \qquad \textit{où K est une constante à choisir}$$

> Je choisis K tel que $h(b) = h(a)$.

Comme $h(a) = 0$ et $h(b) = f(b) - f(a) - K(b-a)$, on trouve $K = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

> La fonction h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle qui assure que : il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$.

Comme $h'(x) = [f(x) - f(a) - K(x-a)]' = f'(x) - K$, on a $h'(c) = f'(c) - K = 0$

$$\text{Conclusion : } f'(c) = K = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Fini □

3.2 L'inégalité des Accroissements Finis.

Théorème 7. L'inégalité des Accroissements finis ou IAF ou TAF

Soit I un intervalle et f une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Version dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec les modules.

$$\left.\begin{array}{r} f \textit{ est dérivable sur } I \\ \\ \forall t \in I,\ |f'(t)| \leqslant k \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{Alors la fonction } f \text{ est k-lipschitzienne} \\ \text{CàD } \forall x, x' \in I,\ |f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'|\end{array}$$

Version dans $\mathbb{R}$ sans valeur absolue.

$$\left.\begin{array}{r} f \textit{ est dérivable sur } I \\ \\ \forall t \in I,\ m \leqslant f'(t) \leqslant M \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall x, x' \in I \text{ avec } x' \leqslant x,\ m(x-x') \leqslant f(x) - f(x') \leqslant M(x-x')$$

Interprétation physicienne d'inégalité des accroissements finis.

L'inégalité des accroissements finis nous dit que

Un point mobile dont la vitesse instantanée v est toujours comprise entre v_{min} et v_{max} entre deux instants t_0 et t_1 parcourt entre ces deux instants une distance comprise entre $v_{min} \times (t_1 - t_0)$ et $v_{max} \times (t_1 - t_0)$.

Démonstration : > Démonstration de la version sans les valeurs absolues dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \leqslant x' \in I$, on a

Comme f est dérivable sur l'intervalle I, elle est bien continue sur $[x, x']$ et dérivable $]x, x'[$ donc d'après l'égalité des accroissements finis,

$$\text{il existe } c \in]x, x'[\text{ tel que } f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x)$$

On encadre $f'(c)$ avec m et M et on n'oublie pas que comme $x \leqslant x'$, on a bien $(x' - x) \geqslant 0$.

> Démonstration de la version avec les valeurs absolues dans $\mathbb{R}$.

C'est la même démonstration mais il est inutile de supposer que $x \leqslant x'$ car quand on a de l'égalité $f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x)$, on met les Valeurs Absolues et on majore sans appréhension car $|x - x'|$ est forcément $\geqslant 0$.

> Démonstration de la version avec les modules dans $\mathbb{C}$.

La démonstration dans $\mathbb{C}$ est différente
car l'égalité des accroissements finis n'est pas valide dans $\mathbb{C}$.
La démonstration est difficile et n'est pas exigible, je la fais vite.

Pour tout $x, x' \in I$, on a

> Comme $f(x) - f(x')$ est un complexe, on peut écrire $f(x) - f(x') = r\, e^{i\theta}$ avec $r = |f(x) - f(x')|$.

Je considère, sur I, la fonction $h = \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f)$ définie par
$$h(t) = [\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f)](t) = \mathrm{Re}(e^{-i\theta}.f(t))$$

> La fonction h est intéressante car on a

$$\begin{aligned} h(x) - h(x') &= \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(x)) - \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(x')) \\ &= \mathrm{Re}(e^{-i\theta}(f(x) - f(x'))) \\ &= \mathrm{Re}(e^{-i\theta}.r.e^{i\theta}) = \mathrm{Re}(r) = r = |f(x) - f(x')| \end{aligned}$$

ET la fonction h, étant une partie réelle, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et pas dans $\mathbb{C}$ donc h est une fonction numérique "classique".

On va appliquer l'IAF à la fonction h.

La suite utilise des propriétés des fonctions dérivables à valeurs complexes.

> La fonction h est dérivable sur I et $h' = [\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f)]' = \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f')$. ainsi

$$\forall\, t \in I, \quad |h'(t)| = |\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f')| \leqslant |e^{-i\theta} f'| \leqslant 1.k = k$$

> Comme la fonction h est à valeurs dans $\mathbb{R}$,
on peut utiliser l'inégalité des accroissements finis, ainsi $|h(x) - h(x')| \leqslant k|x - x'|$
Or $|h(x) - h(x')| = |f(x) - f(x')|$ donc c'est fini!!! Fini □

4 Applications classiques.

4.1 Le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

Théorème 8. Théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$

Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$

On suppose que : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} f(x)=\ell$ et que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} f'(x)=\ell'$,

Alors la fonction f se prolonge par continuité en a et le prolongement est $\mathscr{C}^1$ en a.

Démonstration : Soit $x\in]a,b[$

> Comme $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} f(x)=\ell$, on prolonge f par continuité en a avec $f(a)=\ell$,

De plus on sait que le prolongement de f est continue sur $[a,x]$.

> De plus on sait que f est dérivable sur $]a,x[$ donc on peut appliquer l'égalité des accroissements finis sur $[a,x]$ ainsi

il existe $c_x\in]a,x[$ tel que $f(x)-f(a)=f'(c_x)(x-a)$

> On a maintenant $Taux_a=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c_x)$.

On a $c_x\in]a,x[$, CàD $a<c_x<x$ donc grâce au théorème des 2 gendarmes, on a $c_x\xrightarrow[x\to a]{}a$.

Or $f'(\square)\xrightarrow[\square\to a]{}\ell'$

$$\text{Ainsi : } Taux_a=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c_x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell'$$

Conclusion : la fonction f est dérivable en a et $f'(a)=\ell'$. De plus $f'(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell'$

donc le prolongement est $\mathscr{C}^1$.

Fini □

4.2 Liens entre Dérivabilité et monotonie.

Théorème 9. La dérivée est nulle

Soit I un intervalle et f une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On a équivalence

(i) f est constante sur I.

(ii) f est dérivable sur I et f' est nulle.

Démonstration : $(i)\implies(ii)$

Je suppose que f est constante égale à K.

Soit $a\in I$. On va démontrer que f est dérivable en a et $f'(a)=0$.

On étudie le taux

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{K-K}{x-a}=0\xrightarrow[x\to a]{}0$$

Ainsi f est dérivable en a et $f'(a)=0$.

$(ii)\implies(i)$

Soit $a\in I$.

On va démontrer que f est constante égale à $f(a)$,
CàD $\forall x\in I,\ f(x)=f(a)$.

Pour tout $x\in I$, la fonction f est continue et dérivable sur $[a,x]$, donc on peut utiliser l'EAF sur $[a,x]$

ainsi il existe $c_x\in]a,x[$ tel que : $f(x)-f(a)=f'(c_x)(x-a)$.

Or f' est nulle donc $f'(c_x)=0$ donc $f(x)=f(a)$.

Fini □

Théorème 10. La dérivée est positive

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On a

f' est (strictement) positive $\implies$ f est (strictement) croissante.

Démonstration : Soit $a<b\in I$

la fonction f est continue et dérivable sur $[a,b]$ donc on peut utiliser l'EAF sur $[a,b]$

ainsi il existe $c\in]a,b[$ tel que : $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Or f' est positive donc $f'(c)>0$ et $b>a$ donc $f(b)-f(a)>0$.

Fini □

5 Exercices

Rolle et accroissements finis

Exercice 1. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On considère le polynôme $A = 4aX^3+3bX^2+2cX-a-b-c$.

En appliquant le théorème de Rolle à un primitive de A,

montrer qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $A(c)=0$.

Exercice 2. Soit $f:[0,1]\longmapsto\mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0)=1$ et $f(1)=e$.

Démontrer qu'il existe $c\in]0,1[$ tel que $f(c)=f'(c)$

Indication : On pourra utiliser la fonction $h: x\longmapsto f(x)e^{-x}$

Exercice 3. Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$ et pour tout $x\in]0,1[$, $f(x)>0$.

Montrer que : Démontrer qu'il existe $c\in]0,1[$, $\dfrac{2f'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

Indication : On pourra utiliser la fonction $h: x\longmapsto f^2(x)f(1-x)$

Exercice 4. Soit f et g continues sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe $c,d\in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(d)}$.
2. (a) Montrer que : il existe $e\in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(e)}{g'(e)}$.
   Indication : On pourra utiliser la fonction définie par $h(x)=f(x)+Kg(x)$ *Où* K *est une constante à bien choisir.*

   (b) Application : Soit f et g deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. On suppose que : $\lim\limits_0 f=\lim\limits_0 g=0$ et $\lim\limits_0 {f'}/{g'}=\ell$.
   Montrer que $\lim\limits_0 {f}/{g}=\ell$. (C'est le théorème de l'Hospital).

Quand Rolle ne s'applique pas

Exercice 5. [Correction] Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose de plus que $f(0)=0$, $f'(0)=0$ et $f(1)=1$, $f'(1)=0$

On va démontrer qu'il existe $c\in]0,1[$ tq $f'(c)=\dfrac{f(c)}{c}$

On considère la fonction ϕ définie par $\phi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

1. Montrer que la fonction ϕ se prolonge en 0
   En déduire qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $\forall x\in[0,1]$, $\phi(x)\leqslant\phi(c)$.
2. Justifier que $c\neq 0$.
3. Déterminer le $DL_1(1)$ de ϕ. En déduire que $c\neq 1$.
4. En déduire que $\phi'(c)=0$ puis conclure.
   Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 6. Soit f est une fonction dérivable sur $[a,b]$ tel que $f'(a)>0$ et $f'(b)<0$.

1. Faites un dessin. Montrer que la fonction f admet son maximum en un point intérieur.
2. En déduire que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. (C'est le théorème de Darboux).

Égalité-Inégalité des accroissements finis

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(0) = f(0) \quad et \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

1. Montrer que la fonction F est continue en 0 avec la méthode classique.
2. la fonction F est continue en 0 avec le théorème des accroissements finis.

Exercice 8.

1. Montrer que :
$$\forall\,(x,x') \in \mathbb{R}^2,\ |\arctan(x) - \arctan(x')| \leqslant |x - x'|$$
2. Soit $0 \leqslant a \leqslant b$. Montrer que :
$$na^{n-1} \leqslant b^n - a^n \leqslant nb^{n-1}$$
3. Montrer que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \cosh(x) - 1 \leqslant x\sinh(x)$$

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad et \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,\sqrt{2}]$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}|u_n - 1|$$
3. Justifier que $0 \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} < 1$
4. En déduire que la suite converge vers 1.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad et \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + \ln(u_n)}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - e| \leqslant \frac{e-1}{2^n}$$
3. Que peut-on conclure ?

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.
On va étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in]0,1[\text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Justifier que $]0,1[$ est stable par f.
   Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0,1]$ tel que $\alpha = f(\alpha)$.
   Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2e}{9}\right)^n$$
   Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

— Rolle, Rolle généralisé et Rolle itéré —

Exercice 12. Racine d'un polynôme.

1. Soit P un polynôme de degré 23. Montrer que P admet au moins une racine réelle.
2. Montrer que l'équation $x^{100} + 3x + 2 = 0$ a au plus 2 solutions réelles.
3. Soit P un polynôme de degré 5. Combien au maximum l'équation $e^x = P(x)$ a-t-elle de solution dans $\mathbb{R}$?

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $A = \left(X^2 - 1\right)^n$.

1. Soit $k \in \{0, 1, ..., (n-1)\}$.
   Démontrer la théorie de la multiplicité, montrer que $A^{(k)}(1) = A^{(k)}(-1) = 0$.
2. En déduire que $A^{(n)}$ a exactement n racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $a < b$ deux réels.
On suppose que $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ et que $f(b) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$

Exercice 15. Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = f(2) = 0$
Montrer que $\forall\, x$, $\exists\, c_x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = (x-1)(x-2)\,\frac{f^{(2)}(c_x)}{2!}$$

Indication : On pourra utiliser la fonction définie par $h(x) = f(x) + K(x-1)(x-2)$ où K est une constante à choisir.

Exercice 16. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\forall\, x \in [0, b]$, $\exists\, c_x \in]0, b[$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(c_x)\,\frac{x^2}{2!}$$

Indication : On pourra utiliser la fonction h définie par $h(x) = f(x) - \left[f(0) + x f'(0) - K\,\dfrac{x^2}{2!}\right]$ où K est une constante à choisir.

Exercice 17. Soit f une fonction réelle admettant n zéros $a_1, a_2, ..., a_n$ tels que $a_1 < a_2 < ... < a_n$.
On suppose que f est n fois dérivable sur $[a_1, a_n]$.

Montrer que $\forall\, x$, $\exists\, c_x \in]a_1, a_n[$ tel que :

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)\,\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$$

Indication : On pourra utiliser la fonction définie par $h(x) = f(x) + K(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$ Où K est une constante à choisir.