Algèbre linéaire.

Exercice 1. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base classique.

On considère les fonctions suivantes

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \ ; \ P \longmapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$$
$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \ ; \ P \longmapsto P(1)$$

On convient que $f^0 = id$ et que $f^n = f \circ \ldots \circ f$

1. Justifier que ϕ est un morphisme de $\mathbb{R}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   En ce que ϕ est le morphisme nul ? En déduire que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}$.
   Déterminer une base et la dimension du noyau.
2. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Soit les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = -2X + 1$, $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$.
   (a) Justifier que : $\mathscr{C} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) On note $E_\lambda = \ker\left(f - \lambda\, id\right)$
   Calculer $f(P_0), f(P_1), f(P_3)$ en fonction de P_0, P_1 et P_2
   En déduire que $P_0 \in E_1$, que $P_1 \in E_{1/2}$ et que $P_1 \in E_{1/4}$
4. Soit le polynôme $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{C}$
   (b) En utilisant la question Q3b., calculer $[\phi \circ f^n](P)$ en fonction de a, b, c.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} [\phi \circ f^n](P) = \int_0^1 P(t)dt$

Polynôme

Exercice 2. On considère la fonction $f$définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$
Il est clair que la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x > 1,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^x}{(1-x)^{n+1}}$$
   De plus exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et de P'_n
2. Calculer P_0, P_1 et P_2
   Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que sur $]1, +\infty[$, f est solution de l'EDL1 : $(x-1)y' - (x-2)y = 0$
   En utilisant la formule de Leibniz, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 1$, $P_{n+1}(x) = (n+2-x)P_n(x) + n(x-1)P_{n-1}(x)$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, la relation $P'_n = -nP_{n-1}$.

Série

Exercice 3. [Correction] **Règle de d'Alembert**

On considère dans cet exercice une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ à termes strictement positifs, CàD $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$

et on souhaite en déduire la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ de la valeur de ℓ.

1. On suppose dans cette question que $\ell > 1$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
   La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est converge-t-elle ?
2. On suppose dans cette question que $\ell \in [0, 1[$.
   On note $K = \dfrac{\ell+1}{2}$. Il est clair que : $0 \leqslant \ell < K = \dfrac{\ell+1}{2} < 1$
   (a) Montrer qu'il existe un rang N_0 telle que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_n \leqslant K \times v_n$.
   En déduire qu'il existe une constante C telle que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_n \leqslant C \times K^n$.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
3. En considérant les séries $\sum \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$, montrer que lorsque $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

   En résumé (et cette propriété sera au programme de spé) :
   — Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell > 1$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.
   — Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell < 1$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
   — Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = 1$, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série.
4. Une application.
   En utilisant le critère d'Alembert, déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.
5. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} \ell + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ avec $\ell > 0$.
   En considérant la série télescopique, montrer que la suite $\left(\ln \dfrac{u_n}{\ell^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   En déduire qu'il existe une constante a tel que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} a.\ell^n$

Math classique

Exercice 4. [Correction] Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé.
   (a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[e,+\infty[$.
   (b) Montrer que : $e\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$
   (c) Justifier que l'équation $f(X)=\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$
   admet une unique solution dans $[1,+\infty[$
   On note u_n cette solution. On a donc $f(u_n)=\dfrac{e^{u_n}}{u_n}=\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
   (a) Montrer que : $\dfrac{e^n}{n}\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt\leqslant\dfrac{e^{n+1}}{n+1}$
   (b) En déduire que un encadrement de u_n puis que $u_n\underset{n\to\infty}{\sim} n$

3. Comme $u_n\underset{n\to\infty}{\sim} n$, CàD $u_n\underset{n\to\infty}{=} n+o(n)$, on décide d'écrire $u_n=n+a_n$ avec $a_n=o(n)$
   (a) Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t}\,dt=\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{e^n}{n}+\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t^2}\,dt$
   (b) Déterminer un équivalent (quand $n\to+\infty$) de $A_n=\dfrac{e^{n+1}}{n+1}-\dfrac{e^n}{n}$
   (c) Démontrer, à l'aide d'un encadrement, que $B_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t^2}\,dt\underset{n\to\infty}{=} o\left(e^n/n\right)$
   (d) Démontrer que $a_n=\ln\left[\dfrac{u_n}{e^n}(A_n+B_n)\right]$
   La suite (a_n) converge-elle ?

Sujet 2

Exercice 5. Compléments/Rappel sur les supplémentaires

Définition 1. Somme et somme directe de Ssev

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F, G deux ssev

> On définit l'ensemble $F+G$ par $F+G=\left\{\overrightarrow{e}\in E \mid \exists(\overrightarrow{f},\overrightarrow{g})\in F\times G \text{ tel que } \overrightarrow{e}=\overrightarrow{f}+\overrightarrow{g}\right\}$

Ainsi $\overrightarrow{e}\in F+G$ Ssi il existe/on peut écrire $\overrightarrow{e}=\overrightarrow{f}+\overrightarrow{g}$ avec $(f,g)\in F\times G$.

On admet/rappelle que : $F+G$ est un ssev de E.

> On dit que F et G sont deux ssev supplémentaire de E, noté $E=F\oplus G$
Ssi $\forall\overrightarrow{e}\in E$, il existe un **unique** couple $(\overrightarrow{f},\overrightarrow{g})\in F\times G$ tel que $\overrightarrow{e}=\overrightarrow{f}+\overrightarrow{g}$

1. Comment justifier que F et G sont deux ssev supplémentaires de E
   (a) Démontrer que : $E=F\oplus G$ si et seulement si $E=F+G$ et $F\cap G=\{\overrightarrow{O}\}$
   (b) On note $\mathscr{B}_F=\left\{\overrightarrow{f_1},\dots,\overrightarrow{f_p}\right\}$ une base de F et $\mathscr{B}_G=\{\overrightarrow{g_1},\dots,\overrightarrow{g_q}\}$ une base de G
   Démontrer que : $E=F\oplus G$ si et seulement si $\mathscr{B}=\mathscr{B}_F\cup\mathscr{B}_G=\left\{\overrightarrow{f_1},\dots,\overrightarrow{f_p},\overrightarrow{g_1},\dots,\overrightarrow{g_q}\right\}$ une base de E

2. Existence d'un supplémentaire
   Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie.
   Soit F un ssev $\mathscr{B}_F=\left\{\overrightarrow{f_1},\dots,\overrightarrow{f_p}\right\}$ une base de F.
   Montrer qu'il existe G un ssev de E tel que $E=F\oplus G$

Exercice 6. Recherche d'un supplémentaire commun

1. On suppose que H_1 et H_2 sont des hyperplans de E avec $H_1\neq H_2$.
   (a) Justifier l'existence de vecteurs $\overrightarrow{u}\in H_1$ et $\overrightarrow{v}\in H_2$ tels que $\overrightarrow{u}\notin H_2$ et $\overrightarrow{v}\notin H_1$
   (b) Montrer que : $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\notin(H_1\cup H_2)$
   (c) Montrer que $G=vect\left(\overrightarrow{w}\right)$ est un supplémentaire commun de H_1 et H_2,
   CàD $E=H_1\oplus G$ et $E=H_2\oplus G$

2. On suppose que F et G sont deux ssev de E avec $F\neq G$ et $\dim(F)=\dim(G)=p$.
   (a) Montrer qu'il existe F' un ssev de E tel que $(F\cap G)\oplus F'=F$.
   On construit de même un ssev G' de E tel que $(F\cap G)\oplus G'=G$.
   (b) Justifier que $F'\cap G'=\left\{\overrightarrow{O}\right\}$ et montrer que $\dim(F')=\dim(G')\in\mathbb{N}^*$. On note $a=\dim(F')=\dim(G')$.
   (c) On considère $\left\{\overrightarrow{f_1},\dots,\overrightarrow{f_a}\right\}$ une base de F' et $\{\overrightarrow{g_1},\dots,\overrightarrow{g_a}\}$ une base de G'.
   Pour tout $i\in\{1,\dots,a\}$, on considère $\overrightarrow{w_i}=\overrightarrow{f_i}+\overrightarrow{g_i}$ et on note $H=Vect\{\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_a}\}$.
      i. Montrer que la famille $\{\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_a}\}$ est libre.
      ii. Montrer que $F\cap H=\left\{\overrightarrow{O}\right\}$.
      iii. Montrer que : H est un supplémentaire commun de F et G, CàD $E=F\oplus H$ et $E=G\oplus H$

Exercice 7. Les noyaux s'essoufflent

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ et on convient $f^0 = id$

On note $K_k = \ker\left(f^k\right)$ et $I_k = \mathrm{Im}\left(f^k\right)$

1. *Image d'un Ssev par un morphisme*

Définition 2. Image d'un Ssev par un morphisme

Soit H est un Ssev de E.
On définit l'image de H par f, noté $f(H)$, par $f(H) = \left\{\overrightarrow{e} \in E \,|\, \exists\, \overrightarrow{a} \in H,\ tq\ \overrightarrow{e} = f\left(\overrightarrow{a}\right)\right\}$

Ainsi $\overrightarrow{e} \in f(H)$ Ssi il existe/on peut écrire $\overrightarrow{e} = f\left(\overrightarrow{a}\right)$ avec $\overrightarrow{a} \in H$.

Remarque : La notation est "ambigu" car elle ne "distingue" pas $f(e)$ et $f(H)$
Lorsque e est un vecteur alors $f(e)$ est un vecteur
Lorsque H est un ensemble alors $f(H)$ est un ensemble
On peut définir $f(H)$ avec f une fonction et H un ensemble
Mais Lorsque f est un morphisme et H un ssev, alors $f(H)$ est un ssev (admis).

   (a) Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N},\ f(I_p) = I_{p+1}$

   (b) Montrer que : Si G, H sont deux Ssev alors $f(G+H) = f(G) + f(H)$

   (c) Montrer que Si $(h_1, \ldots, h_n)$ est une base du ssev H alors $\left(f(h_1), \ldots, f(h_n)\right)$ est une famille génératice de $f(H)$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. On va démontrer que : $\dim(K_{p+2}) - \dim(K_{p+1}) \leqslant \dim(K_{p+1}) - \dim(K_p)$

   (a) Montrer que : $\dim(K_{p+2}) - \dim(K_{p+1}) = \dim(I_{p+1}) - \dim(I_{p+2})$
   et justifier qu'il existe un Ssev H de E tel que $I_p = I_{p+1} \oplus H$

   (b) En utilisant les propriétés "naturelles" démontrer à la question Q1.,
   démontrer que : $\dim(I_{p+1}) - \dim(I_{p+2}) \leqslant \dim(I_p) - \dim(I_{p+1})$ et conclure.

Série

Exercice 8. [Correction] **Règle de Raabe-Duhamel**

Dans cet exercice, on énonce un critère de convergence qui précise le cas ambigu de la règle de d'Alembert. On considère toujours une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ à termes strictement positifs.

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1-\dfrac{\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que si $\alpha<0$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.
2. On suppose dans cette question que $\alpha>1$.
   Soit $\beta=\dfrac{1+\alpha}{2}$. Il est clair que $1<\beta<\alpha$ et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\dfrac{1}{n^\beta}$.
   (a) Déterminer un équivalent de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
   En déduire que : $\exists N_0$ tel que $\forall n\geqslant N_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
   (b) Montrer l'existence d'un réel positif K tel qu'on ait $u_n\leqslant K v_n$ à partir d'un certain rang.
   (c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
3. On suppose maintenant que $\alpha\in[0;1[$.
   En adaptant le raisonnement de la question précédente, démontrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.
   On notera que ici $\alpha<\beta=\dfrac{\alpha+1}{2}<1$.
4. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1-\dfrac{\alpha}{n}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.
   On considérant la série télescopique, montrer que la suite $\left(\ln(n^\alpha u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   En déduire qu'il existe une constante a tel que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{a}{n^\alpha}$

Exercice 9. [Correction]

Partie I. Étude d'une suite et de sa série.

On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \text{ et sa série associée } \sum u_n$$

1. Montrer que : $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt$
   En déduire que la série $\sum u_n$ est alternée.
2. On note $a_n = |u_n| = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt$. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et converge vers 0.
3. En déduire que la suite (S_n) définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

   converge vers une limite ℓ

Partie II. Étude d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$

On admet que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$

1. On suppose que $0 < x < y$. Montrer que

$$\left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \frac{2}{x}$$

   Indication : On fera une IPP avant de majorer.
2. On fixe $x > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et r tel que : $x = n.\pi + r$ et $0 \leqslant r < \pi$
   (b) En déduire que : $\left|f(x) - S_{n-1}\right| \leqslant \dfrac{2}{n\pi}$
   (c) Dépendance et final
      > Expliquer pourquoi le nombre n dépend de x donc je le note n_x
      > Justifier que $n_x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$
      Rappel : ℓ est le nombre trouvé à la fin de la partie I.

Partie III. Calcul de ℓ.

1. On considère la fonction ϕ définie par $\phi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$
   Déterminer les limites de $\phi(x)$ et de $\phi'(x)$ quand $x \to 0$
   On admet que (théorèmes à venir) que grâce à ces 2 limites la fonction ϕ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
   et que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \phi(t)\ \sin\left[(2n+1)\,t\right]dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ Lemme de Lebesgue.
2. Calcul d'une intégrale
   (a) Montrer que : $\forall\, t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) = \frac{\sin\left[(2n+1)\,t\right]}{\sin t}$
   (b) Cette égalité se prolonge-t-elle en $t = 0$?
   (c) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left[(2n+1)\,t\right]}{\sin t}\,dt = \frac{\pi}{2}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left[(2n+1)\,t\right]}{t}\,dt$
   Montrer que $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$. *Indication : Utiliser le théorème de la distance, la question précédente et Lemme de Lebesgue*
4. En comparant $f\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ et I_n, montrer que $\ell = \dfrac{\pi}{2}$
   Rappel : f est la fonction de la partie II et ℓ est le nombre trouvé à la fin de la partie I.

   Conclusion Final : Ce problème a permis de montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. ϕ est une forme linéaire ?

   On doit montrer que ϕ est linéaire et à valeur dans $\mathbb{R}$. Facile.

   Déterminer son image et une base de son noyau. ?

   $>$ $\text{Im}(\phi)$ est une ssev de $\mathscr{A} = \mathbb{R}$. Or $\dim(\mathbb{R}) = 1$

   Donc $\dim\Big(\text{Im}(\phi)\Big) = 0 \ ou \ 1.$

   Comme ϕ n'est pas la fonction nulle, donc $\text{Im}(\phi)$ n'est pas réduit au vecteur nul

   Conclusion : $\dim\Big(\text{Im}(\phi)\Big) = 1$ et $\in (f) = \mathbb{R} = \mathscr{A}$

   .

   $>$ Avec le théorème du rang, on a $\dim\Big(\ker(\phi)\Big) = n$

   De plus la famille $\Big((X-1), (X-1)^2, \dots, (X-1)^n\Big)$ est une famille libre (les degrés sont 2 à 2 $\neq$), dans $\ker(_phi)$ et de cardinal n

   donc c'est une base de $\ker(\phi)$

2. On doit montrer que ϕ est linéaire et à valeur dans $\mathbb{R}_2[X]$. Facile.
3. Soit les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = -2X+1$, $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$.
   (a) famille libre (les degrés sont 2 à 2 $\neq$),
   dans $\mathbb{R}_2[X]$ et de cardinal 3
   donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) On a

$$
\begin{aligned}
P_0 &\xmapsto{f} f(P_0) = \cdots = 1 = P_0\\
P_1 &\xmapsto{f} f(P_0) = \cdots = -X + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} P_1\\
P_2 &\xmapsto{f} f(P_0) = \cdots = \frac{6}{4} X^2 - \frac{6}{1} X + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} P_2
\end{aligned}
$$

4. Soit le polynôme $P = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}$.
   (a) On a

$$
\begin{aligned}
P = a + bX + cX^2 &= \overset{\frac{c}{6}}{\dots} \Big[6X^2 - 6X + 1\Big] + \overset{\frac{1}{2}(-c-b)}{\dots} \Big[-2X+1\Big] + \overset{a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c}{\dots} \Big[1\Big]\\
&= \overset{\frac{c}{6}}{\dots} P_2 + \overset{\frac{1}{2}(-c-b)}{\dots} P_1 + \overset{a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c}{\dots} P_0
\end{aligned}
$$

   (b) À cause Q3b, on a

$$
\begin{aligned}
P_0 &\xmapsto{f} f(P_0) = P_0 \xmapsto{f} \cdots \xmapsto{f} f^n(P_0) = P_0\\
P_1 &\xmapsto{f} f(P_0) = \frac{1}{2} P_1 \xmapsto{f} \cdots \xmapsto{f} f^n(P_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n P_1\\
P_2 &\xmapsto{f} f(P_0) = \frac{1}{4} P_2 \xmapsto{f} \cdots \xmapsto{f} f^n(P_1) = \left(\frac{1}{4}\right)^n P_2
\end{aligned}
$$

   Grâce à la linéarité de f, on a

$$
\begin{aligned}
f^n(P) &= \frac{c}{6} f^n(P_2) + \frac{1}{2}(-c-b) f^n(P_1) + a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} c f^n(P_0)\\
&= \frac{c}{6} \frac{1}{4^n} P_2 + \frac{1}{2}(-c-b) \frac{1}{2^n} P_1 + \left(a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} c\right) P_0
\end{aligned}
$$

   Grâce à la linéarité de ϕ, on a $[\phi \circ f^n](P) = \frac{c}{6} \frac{1}{4^n} \phi(P_2) + \frac{1}{2}(-c-b) \frac{1}{2^n} \phi(P_1) + \left(a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} c\right) \phi(P_0)$

   Conclusion : $[\phi \circ f^n](P) = \dfrac{\frac{c}{6}}{4^n} + \dfrac{\frac{1}{2}(c+b)}{2^n} + \left(a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} c\right)$

   (c) On a maintenant

$$
\lim_{n\to\infty} [\phi \circ f^n](P) = \lim_{n\to\infty} \frac{c/6}{4^n} + \frac{\frac{1}{2}(c+b)}{2^n} + \left(a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} c\right) = a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} c
$$

$$
et
$$

$$
\int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 (a + bt + ct^2)\, dt = \Big[Primitive\Big]_0^1 = a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} c
$$

   Donc c'est bien égale.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On considère dans cet exercice une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ à termes strictement positifs, CàD $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell\in\mathbb{R}$

et on souhaite en déduire la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ de la valeur de ℓ.

1. On suppose dans cette question que $\ell>1$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

   Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1}-u_n=u_n\left[\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1\right]$

   J'applique la définition de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1\xrightarrow[n\to\infty]{}L=\ell-1>0$ avec $\varepsilon=\dfrac{\ell-1}{2}>0$

   Ainsi il existe N_0 tel que $\forall n\geqslant N_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1\leqslant L+\varepsilon=\ell-1+\dfrac{1-\ell}{2}=\dfrac{\ell-1}{2}>0$

   Conclusion : $\forall n\geqslant N_0,\ u_{n+1}-u_n=u_n\left[\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1\right]\leqslant u_n\dfrac{\ell-1}{2}>0.$

   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.

   À partir du rang N_0 la suite est croissante, donc on a $0<u_{N_0}\leqslant u_{N_0+1}\leqslant\cdots\leqslant u_n$

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.

2. On suppose dans cette question que $\ell\in[0,1[$. On fixe un réel $K\in]\ell;1[$ par exemple $K=\frac{\ell+1}{2}$
   (a) Montrer qu'il existe une constante C et un rang N_0 telle que $\forall n\geqslant N_0,\ u_n\leqslant C\times K^n$.

   J'applique la définition de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell$ avec $\varepsilon=\dfrac{1-\ell}{2}>0$

   Ainsi il existe N_0 tel que $\forall n\geqslant N_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\ell+\varepsilon=\dfrac{1+\ell}{2}=K$

   $\implies u_{n+1}\leqslant Ku_n$

   Conclusion : "À la mode géo", on a $\forall n\geqslant N_0,\ u_n\leqslant K^{n-N_0}u_{n_0}=C\times K^n$ avec $C=u_{N_0}K^{-N_0}$

   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

   Comme $u_n>0$ et $u_n\underset{n\to\infty}{=}\mathcal{O}\left(K^n\right)$ et la série de référence géo $\sum K^n$ converge

   Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

3. En considérant les séries $\sum\dfrac{1}{n}$ et $\sum\dfrac{1}{n^2}$, montrer que lorsque $\ell=1$, on ne peut pas conclure.

   La série $\sum\dfrac{1}{n}$ est divergente et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\dfrac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

   La série $\sum\dfrac{1}{n^2}$ est convergente et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\dfrac{n^2}{(n+1)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

   Conclusion : Lorsque $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell=1$, on ne peut pas conclure.

4. Une application. En utilisant le critère d'Alembert, déterminer la nature de la série $\sum\dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.

   On a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}}}{\frac{1}{\binom{2n}{n}}}&=\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}}\\&=\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\,\frac{(n+1)!(n+1)!}{n!n!}\\&=\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{n[1+o(1)]n[1+o(1)]}{2n[1+o(1)]2n[1+o(1)]}=\frac{1}{4}[1+o(1)]\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{4}\end{aligned}$$

   Conclusion : La série $\sum\dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$ est à terme >0 et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{1}{4}<1$

   Donc d'après le critère de D'Alembert, la série converge.

5. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} \ell + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ avec $\ell > 0$.
En considérant la série télescopique, montrer que la suite $\left(\ln \dfrac{u_n}{\ell^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
En déduire qu'il existe une constante a tel que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} a.\ell^n$

On note $a_n = \ln \dfrac{u_n}{\ell^n}$. On a

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n = \ln \frac{u_{n+1}}{\ell^{n+1}} - \ln \frac{u_n}{\ell^n} &= \ln\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{\ell^n}{\ell^{n+1}}\right] \\
&= \ln\left[\left(\ell + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\frac{1}{\ell}\right] \\
&= \ln\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \square + \mathcal{O}\left(\square^2\right) \\
&\text{avec } \square = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } \mathcal{O}\left(\square^2\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \mathcal{O}\left(\square^2\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : La série télescopique $\sum a_{n+1} - a_n$ est converge donc la suite $\left(\ln \dfrac{u_n}{\ell^n}\right)$ converge.
On note α sa limite

Ainsi on a $\ln \dfrac{u_n}{\ell^n} = \alpha + o(1)$

$$\implies \frac{u_n}{\ell^n} = e^{\alpha + o(1)} = e^{\alpha}e^{o(1)} = e^{\alpha}[1 + o(1)]$$

Conclusion : $u_n = \ell^n e^{\alpha}[1 + o(1)] \underset{n\to\infty}{\sim} a.\ell^n$ avec $a = e^{\alpha} > 0$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$

   (a) La fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall t\geqslant 1,\ f'(t)=\dfrac{te^t-e^t}{t^2}=e^t\dfrac{t-1}{t^2}$ D'où le tableau

t	1	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	e $\nearrow$	$+\infty$

   Ainsi La fonction f est continue strictement croissante

   donc elle réalise une bijection (croissante) de $[1,+\infty[$ sur $[e,+\infty[$

   (b) Comme f est croissante sur $[1,+\infty[$, on a que : Pour tout $t\in[n,n+1]$, on a $f(t)\geqslant f(n)\geqslant f(e)$

   On intègre de $t=n$ à $t=n+1$

$$\text{Ainsi on a } \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geqslant \underbrace{\int_n^{n+1} e\,dt}_{=e}$$

   (c) Comme f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[e,+\infty[$ et que le nombre $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt\in[e,+\infty[$

   On sait que l'équation $f(X)=\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$ admet une unique solution dans $[1,+\infty[$.

   On note u_n cette solution.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

   (a) On a ainsi

   → Comme $n\geqslant 1$, la fonction f est croissante sur $[n,n+1]$,

   ainsi on a $t\in[n,n+1]$, $\dfrac{e^n}{n}=f(n)\leqslant f(t)\leqslant f(n+1)=\dfrac{e^{n+1}}{n+1}$.

   → On intègre sur $[n,n+1]$ ainsi

$$\underbrace{\int_n^{n}\frac{e^n}{n+1}dt}_{=\frac{e^n}{n}}\leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt\leqslant \underbrace{\int_n^{n+1}\frac{e^{n+1}}{n+1}dt}_{=\frac{e^{n+1}}{n+1}}$$

   (b) On remarque que $\underbrace{\dfrac{e^n}{n}}_{=f(n)}\leqslant \underbrace{\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt}_{=f(u_n)}\leqslant \underbrace{\dfrac{e^{n+1}}{n+1}}_{=f(n+1)}$

   Or f est croissante donc $n\leqslant u_n\leqslant n+1$ et à l'aide des gendarmes $\dfrac{u_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

   Conclusion : $u_n\underset{n\to\infty}{\sim}n$

3.

   (a) On fait une IPP

   (b) Étude de A_n et B_n .

   i. On a

$$\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{e^n}{n}=e^n\left[\frac{e}{n+1}-\frac{1}{n}\right]=e^n\frac{en-(n+1)}{n(n+1)}=e^n\frac{n(e-1)-1}{n(n+1)}=e^n\frac{(e-1)n[1+o(1)]}{n\,n[1+o(1)]}=(e-1)\frac{e^n}{n}[1+o(1)]$$
$$\underset{n\to\infty}{\sim}(e-1)\frac{e^n}{n}$$

   ii. On a

   > On a $\forall t\in[n,n+1]$, $0\leqslant\dfrac{e^t}{t^2}\leqslant\dfrac{e^{n+1}}{n^2}$.

   > On intègre sur $[n,n+1]$, ainsi $0\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t^2}dt\leqslant\frac{e^{n+1}}{n^2}$

   Ainsi on a $0\leqslant\dfrac{B_n}{\frac{e^n}{n}}\leqslant\dfrac{\frac{e^{n+1}}{n^2}}{\frac{e^n}{n}}=\dfrac{e}{n}$.

$$\text{Conclusion } \frac{B_n}{\frac{e^n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ CàD } B_n = o\left(\frac{e^n}{n}\right)$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
f(u_n) = \frac{e^{u_n}}{u_n} = \int_n^{n+1} f(t)\,dt = A_n + B_n \\
\implies u_n = n + a_n = \ln[u_n(A_n+B_n)] \\
\implies a_n &= -n + \ln[u_n(A_n+B_n)] \\
&= \ln\left(e^{-n}\right) + \ln[u_n(A_n+B_n)] \\
&= \ln\left[e^{-n}u_n(A_n+B_n)\right] \\
&= \ln\left[\tfrac{u_n(A_n+B_n)}{e^n}\right]
\end{aligned}$$

On sait de plus $u_n = n + o(n)$
$A_n = \frac{e^n}{n}[(e-1)+o(1)] = \frac{e^n}{n}(e-1) + o\left(\frac{e^n}{n}\right)$
$B_n = o\left(\frac{e^n}{n}\right)$

$$\begin{aligned}
\text{On a donc } a_n &= \ln\left[\frac{u_n(A_n+B_n)}{e^n}\right] \\
&= \ln\left[\frac{(n+o(n))\left(\frac{e^n}{n}(e-1)+o\left(\frac{e^n}{n}\right)+o\left(\frac{e^n}{n}\right)\right)}{e^n}\right] \\
&= \ln\Big((e-1)+o(1)\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(e-1)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) Dans cet exercice, on énonce un critère de convergence qui précise le cas ambigu de la règle de d'Alembert.

On considère toujours une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ à termes strictement positifs.

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1-\dfrac{\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si $\alpha<0$ alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

   On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1-\dfrac{\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\alpha<0$.

   Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1^+$, ainsi il existe N_0 tel que $\forall\, n\geqslant N_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$

   À partir du rang N_0 la suite est croissante, donc on a $0<u_{N_0}\leqslant u_{N_0+1}\leqslant\cdots\leqslant u_n$

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.

2. On suppose dans cette question que $\alpha>1$.

   On fixe un réel $\beta\in\left]1;\alpha\right[$ par exemple $\beta=\dfrac{1+\alpha}{2}$ et on considère $v_n=\dfrac{1}{n^\beta}$.

   (a) Déterminer un équivalent de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

   En déduire que : $\exists N_0$ tel que $\forall\, n\geqslant N_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

   On a

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n}-\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta}-\left[1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}-\left[1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&=\left[1-\frac{\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]-\left[1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&=\frac{\alpha-\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\alpha-\beta}{n}
\end{aligned}$$

   Comme $\dfrac{\alpha-\beta}{n}>0$ et on sait que les équivalents "conservent" les signes

   Ainsi $\exists N_0$ tel que $\forall\, n\geqslant N_0$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 0$.

   (b) Montrer l'existence d'un réel positif K tel qu'on ait $u_n\leqslant Kv_n$ à partir d'un certain rang.

   À partir du rang N_0, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

   Comme u_n et v_{n+1} sont positifs, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\leqslant\dfrac{u_n}{v_n}$

   La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang N_0

   Conclusion : $\forall\, n\geqslant N_0$, $\dfrac{u_n}{v_n}\leqslant\dfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\dfrac{u_{N_0}}{v_{N_0}}$

   D'où le résultat avec $C=\dfrac{u_{N_0}}{v_{N_0}}$

   (c) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

   Comme $0\leqslant u_n\leqslant Kv_n$ à partir d'un certain rang, on a $u_n=\mathcal{O}(v_n)=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$ et $\sum\dfrac{1}{n^\beta}$ est une série de Riemann convergente

   Donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

3. On suppose maintenant que $\alpha\in[0;1[$.

   En adaptant le raisonnement de la question précédente, démontrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente. (On pourra choisir un β tel que $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge).

4. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1-\dfrac{\alpha}{n}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.

   On considérant la série télescopique, montrer que la suite $\left(\ln(n^\alpha u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   En déduire qu'il existe une constante a tel que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{a}{n^\alpha}$

On note $a_n = \ln \dfrac{u_n}{n^\alpha}$. On a

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n = \ln(u_{n+1}(n+1)^\alpha) - \ln(u_n n^\alpha) &= \ln\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}\right] \\
&= \ln\left[\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\right] \\
&= \ln\left[\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \\
&= \ln\left(1 + \frac{1}{n}[\alpha - \alpha] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \square + \mathcal{O}\left(\square^2\right) \\
&\text{avec } \square = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } \mathcal{O}\left(\square^2\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \mathcal{O}\left(\square^2\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : La série télescopique $\sum(a_{n+1} - a_n)$ est converge donc la suite $\left(\ln \dfrac{u_n}{n^\alpha}\right)$ converge.
On note L sa limite

Ainsi on a $\ln(u_n n^\alpha) = L + o(1)$

$$\Longrightarrow u_n n^\alpha = e^{L+o(1)} = e^L e^{o(1)} = e^L[1+o(1)]$$

Conclusion : $u_n = \dfrac{e^L}{n^\alpha}[1+o(1)] \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{a}{n^\alpha}$ avec $a = e^L > 0$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

Correction très/trop rapide

Partie I. Étude d'une suite et de sa série.

On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \text{ et sa série associée } \sum u_n$$

1. Montrer que : $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi} dt$

   On fait le changement de variable $u = t - n\pi$

   En déduire que la série $\sum u_n$ est alternée.

   On a $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi} dt \geqslant 0$
   car sur $[0,\pi]$, tout est $\geqslant 0$ et les bornes sont croissantes

2. On note $a_n = |u_n| = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi} dt$. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et converge vers 0.

   Décroissante ?

   $u_{n+1} - u_n =$ On remplace, on regroupe, on FFB et on regarde les signes sur le plateau

   Converge vers 0 ?

   On a : $0 \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi} dt \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{0+n\pi} dt$
   puis gendarmes

3. En déduire que la suite (S_n) converge vers une limite ℓ

   critère spéciale des séries altenées

Partie II. Étude d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

On admet que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$

1. On suppose que $0 < x < y$. Montrer que : $\left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \frac{2}{x}$

   On a avec une IPP

$$\begin{aligned}
\left|f(y) - f(x)\right| &= \left|\int_0^y \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt\right| \\
&= \left|\int_x^y \frac{\sin t}{t} dt\right| \\
&\textit{Ici IPP} \\
&= \left|\left[\frac{-cos t}{t}\right]_x^y - \int_x^y \frac{\cos(t)}{t^2} dt\right| \\
&= \left|\frac{cos(x)}{x} - \frac{cos(y)}{y} + \int_x^y \frac{\cos(t)}{t^2} dt\right| \\
&\textit{Inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \left|\frac{cos(x)}{x}\right| + \left|\frac{cos(y)}{y}\right| + \int_x^y \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| dt \\
&\leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \int_x^y \frac{1}{t^2} dt \\
&\leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \left[\frac{-1}{t}\right]_x^y \\
&\leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{x}
\end{aligned}$$

2. On fixe $x > 0$.

   (a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et r tel que : $x = n.\pi + r$ et $0 \leqslant r < \pi$

   (b) En déduire que : $\left|f(x) - S_{n-1}\right| \leqslant \frac{2}{n\pi}$

   (c) Dépendance et final

$>$ Expliquer pourquoi le nombre n dépend de x donc je le note n_x

$>$ Justifier que $n_x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

Rappel : ℓ est le nombre trouvé à la fin de la partie I.

Partie III. Calcul de ℓ.

1. On considère la fonction ϕ définie par $\phi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$

   Déterminer les limites de $\phi(x)$ et de $\phi'(x)$ quand $x \to 0$

   On admet que (théorèmes à venir) que grâce à ces 2 limites la fonction ϕ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

   et que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \phi(t)\ \sin[(2n+1)\,t]\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *Lemme de Lebesgue.*

2. Calcul d'une intégrale

   (a) Montrer que : $\forall\, t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) = \dfrac{\sin[(2n+1)\,t]}{\sin t}$

   (b) Cette égalité se prolonge-t-elle en $t = 0$?

   (c) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin[(2n+1)\,t]}{\sin t}\,dt = \dfrac{\pi}{2}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin[(2n+1)\,t]}{t}\,dt$

   Montrer que $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$. *Indication : Utiliser le théorème de la distance, la question précédente et Lemme de Lebesgue*

4. En comparant $f\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2} \right)$ et I_n, montrer que $\ell = \dfrac{\pi}{2}$

   Rappel : f est la fonction de la partie II et ℓ est le nombre trouvé à la fin de la partie I.

Conclusion Final : Ce problème a permis de montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,dt = \dfrac{\pi}{2}$