Programme de colle de la semaine 22

du Lundi 31 Mars au Vendredi 04 Avril.

Questions de cours et autour du cours.

> Division euclidienne.

Énoncer le théorème de division euclidienne.
Démontrer l'unicité.

> Reste de la division euclidienne.

Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par X^2+5X+6.
Application : Montrer que le polynôme X^2+5X+6 annule la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.
En déduire A^n

> Racine. Soit A un polynôme et $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer l'équivalence

$A(r)=0 \iff (X-r)$ se factorise dans A

> Racine. Soit A un polynôme et $r, r', r'' \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, deux à deux différends.

Montrer que r, r', r'' sont racines de A alors $(X-r)(X-r')(X-r'')$ se factorise dans A

> Polynôme Périodique.

Montrer qu'un polynôme T-périodique est constant.

> Multiplicité d'une racine r.

Définir la multiplicité d'une racine r dans le polynôme A
Démontrer que : Si r est une racine de multiplicité α dans A
Alors r est une racine de multiplicité $(\alpha-1)$ dans A'
Application : Démontrer que si r est une racine du polynôme A de multiplicité α
Alors $A(r)=A'(r)=\cdots=A^{(\alpha-1)}(r)=0$

> Multiplicité d'une racine r.

Définir la multiplicité d'une racine r.
Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes en $x=r$.
Démontrer que : $A(r)=A'(r)=\cdots=A^{(\alpha-1)}(r)=0$ alors r est une racine du polynôme A de multiplicité α

> Racine multiple.

Justifier que les racines du polynômes $P(X)=X^n+nX-1$ sont simples.

> Éléments simples : Primitive.

Soit $r \in \mathbb{R}$. Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x-r}$, de $\dfrac{1}{(x-r)^2}$, de $\dfrac{1}{(x-r)^3}$ puis de $\dfrac{1}{(x+1)^2(x+2)}$ sur $]-2,0[$.

> Éléments simples : Dérivée n-ième.

Déterminer la dérivée n-ième de $\dfrac{1}{x-r}$, de $\dfrac{1}{(x-r)^2}$ puis de $\dfrac{1}{(x+1)^2(x+2)^2}$.

> Éléments simples.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que : $\dfrac{1}{X^n-1} \overset{\text{D.E.S}}{=} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\omega_k}{X-\omega_k}$ avec $\omega_k=\exp\left(ik\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

Exercices

Je finis le cours sur la décompositions en éléments simples Lundi.