Racine, rigidité des polynômes.

1 Divise et division euclidienne.

1.1 Divise.

Définition 1.
On considère deux polynômes A et B

On dit que A divise B, noté $A|B$ *ou* A divise B, Ssi

Il existe un polynôme P tel que $B = AP$

Vocabulaire : on dit alors que A est un diviseur de B et que B est un multiple de A.
Remarque : Il est clair que la relation divise est transitive.

Théorème 2. Formulaire.
Soit A, B, C des polynôme non nul.

> A divise $B \implies \deg A \leqslant \deg B$. Remarque : C'est faux si $B = 0$
On a donc

$$\left.\begin{array}{c} A \text{ divise } B \\ \deg A \underset{Strict}{>} \deg B \end{array}\right\} \implies B = 0$$

> La relation *divise* est presque anti-symétrique.

$$\left.\begin{array}{c} A \text{ divise } B \\ \text{et} \\ B \text{ divise } A \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} \text{Il existe une constante } \lambda \\ \text{tel que } A = \lambda B \end{array}$$

Démonstration : Comme A divise B, il existe un polynôme P tel que $B = AP$.
On sait que

$$B = AP \implies \deg B = \deg A + \deg P$$

Comme $B \neq 0$, on a $P \neq 0$ et donc $\deg(P) \geqslant 0$.
Conclusion : $\deg A \leqslant \deg B$.
Si de plus $\deg A = \deg B$ alors $\deg P = 0$ donc P est une constante.

Fini □

> Démonstration "presque anti-symétrique".

On suppose que A *divise* B ET que B *divise* A

> Situation 1 : On suppose que A ou B est égale à 0
Alors forcément (à faire) $A = B = 0$. Je choisis $\lambda = \ln(2)$ fini.

> Situation 2 : On suppose maintenant que A ET B sont $\neq 0$.

On a avec ce qui précède

$$\left.\begin{array}{c} A \text{ divise } B \Longrightarrow \deg A \leqslant \deg B \\ \text{et} \\ B \text{ divise } A \Longrightarrow \deg B \leqslant \deg A \end{array}\right\} \Longrightarrow \deg A = \deg B \geqslant 0_{\text{car } \neq 0}$$

On applique (i) et c'est fini.

Fini □

Exercice 1. [Correction] On suppose que : Si A divise B, montrer que A^2 divise $\left(A'B - AB'\right)$.

1.2 Division euclidienne.

Théorème 3. Division euclidienne de A par B
On considère deux polynômes A et B avec en plus $B \neq 0$

Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) avec les 2 propriétés

$$A = B\,Q(X) + R(X) \quad ET \quad \deg(R) \underset{\text{Strict}}{<} \deg(B)$$

C'est la division euclidienne de A par B.

Démonstration :

Démonstration de l'existence. C'est en fait une révision d'algèbre linéaire.

Comme $B \neq 0$, on note $p = \deg B \geqslant 0$ et je note $n = \deg A$
Je vous laisse méditer la situation $n < p$.
On suppose $n \geqslant p$. Je considère les polynômes

$$1, X, X^2, .., X^{p-1},\ B\ ,\ XB\ ,\ X^2B(X)\ ,...,\ X^{n-p}B.$$

1. Justifier que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En décomposant A dans cette base, trouver R et Q.

Démonstration de l'unicité. C'est une application des méthodes sur le degré.

On suppose que $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ plus les conditions sur les degrés.
On a donc $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$,
En comparant deg(G) et deg(D), montrer que $Q_1 - Q_2 = 0$ et $R_2 - R_1 = 0$

Exercice 2. [Correction] Il y a-il un argument de cohérence, CàD sans calcul, pour dire si les égalités suivante sont des division euclidienne ?

$$\underbrace{X^n + X^2 - X + 1}_{A} = \underbrace{X}_{B}\,\underbrace{(X^{n-1} + X)}_{Q} - \underbrace{X + 1}_{R}$$

$$\underbrace{X^n - X + 1}_{A} = \underbrace{X}_{B}\,\underbrace{(X^{n-1} - 1)}_{Q} + \underbrace{1}_{R}$$

$$\underbrace{X^n - X^{n-1} + 1}_{A} = \underbrace{(X - 1)}_{B}\,\underbrace{(X^{n-1} - 1)}_{Q} + \underbrace{X}_{R}$$

Exercice 3. [Correction] Déterminer le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Méthodologie.

On déterminer le degré possible de R qui heureusement sera petit puis les coefficients.

1. $A = X^n$ et $B = (X - 42)$.
2. $A = X^n$ et $B = (X - 1)(X - 2)$.
3. $A = X^n$ et $B = (X - 1)^2$.
4. $A = (X + 1)^n - X^n - 1$ et $B = X^2 + X + 1$.

2 Racine.

2.1 Racine d'un polynôme.

Théorème 4. Définition, Caractérisation.
On considère $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On a équivalence entre

(i) r est une racine du polynôme A.

(ii) $A(r) = 0$

(iii) $(X - r)$ divise A.
CàD Il existe un polynôme P tel que $A = (X - r)\,P$

Il est évident que $(iii) \implies (ii)$.
On va faire plusieurs démonstrations de $(ii) \implies (iii)$ qui sont en fait des exercices utiles.

Exercice 4. [Correction] *Démonstration de $(ii) \implies (iii)$ avec la formule de Taylor.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

Énoncer le théorème de Taylor pour les polynômes (en particulier quelles sont le/les hypothèses du théorème).
En utilisant le théorème de Taylor, trouver P tel que $A = (X - r)\,P$

Exercice 5. *Démonstration de $(ii) \implies (iii)$ avec la division euclidienne.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

En suivant la démarche du travail 8, déterminer le reste de la division euclidienne de A pas $(X - r)$.

Exercice 6. *Démonstration de $(ii) \implies (iii)$ avec le principe de superposition.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Déterminer un polynôme Q_k tel que $X^k - r^k = (X - r)\,Q_r$.
En déduire qu'il existe un polynôme P tel que $A = (X - r)\,P$.

Indication : Chercher, avant de lire dans un miroir, l'indication ci-dessous :
Comme $\deg(A) \leqslant n$, on sait que $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Ainsi on a $A(X) = A(X) - A(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = \cdots$.

Exercice 7. *Démonstration de $(ii) \implies (iii)$ avec l'algèbre linéaire.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.
On considère $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \text{tel que } P(r) = 0\}$

Montrer que H est un ssev strict de $\mathbb{R}_n[X]$. Que peut-on en déduire sur $\dim(H)$?

Montrer que : $\mathscr{B} = \left[(X - r), X(X - r), \dots, X^{n-1}(X - r)\right]$ est une famille libre de H.
Que peut-on en déduire sur $\dim(H)$?

Déterminer $\dim(H)$ puis que $\mathscr{B}$ est une base de H.

En utilisant la base $\mathscr{B}$ montrer (iii)

2.2 Rigidités des polynômes.

Théorème 5. D'Alembert-Gauss et rigidités des polynômes.

> **D'Alembert-Gauss.** Soit A un polynôme de degré n

Alors le polynôme A admet n racines dans $\mathbb{C}$
et on a la factorisation $A = a(X - r_1)\cdots(X - r_n)$

> **Rigidités des polynômes.**

$$\left.\begin{array}{c} A \text{ est un polynôme} \\ A \text{ admet une infinité de racine} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Alors le polynôme } A \text{ est nul.}$$

$$\left.\begin{array}{c} A \text{ est un polynôme de degré} \leqslant n \\ A \text{ admet trop de racine, CàD } (n+1) \text{ ou plus} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Alors le polynôme } A \text{ est nul.}$$

$$\left.\begin{array}{c} A \text{ et } B \text{ sont deux polynômes} \\ A(\square) = B(\square) \text{ pour une infinité de } \square \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Alors } A(X) = B(X).$$

Application/Exemple.

Montrer que les polynômes de Chebychev sont uniques.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit P_n le polynôme

$$P_n = 1 - X + \frac{X(X-1)}{2} - \ldots + (-1)^n \frac{X(X-1)\ldots(X-(n-1))}{n!}$$

> Calculer et factoriser P_1, P_2, P_3

> À votre avis, quelle est la factorisation de P_n. Démontrer le.

Exercice 9. [Correction] **À la recherche de propriétés caractéristiques des polynôme.**

Justifier qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sin(x)$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = e^x$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = |x|$

Justifier qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

5. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \overline{z}$
6. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = |z|$

Exercice 10. [Correction] Soit P un polynôme 1-périodique CàD vérifiant $P(X+1) = P(X)$

On va montrer que P est constant égale à $P(0)$, CàD $P = P(0)$.

On considère le polynôme $A = P - P(0)$.

Vérifier que 0, 1, 2 sont des racines de A.

Trouver une infinité de racine pour A et conclure.

2.3 Multiplicité des racines.

Définition 6. Définition de la multiplicité 2 ou racine double.
Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

> On dit que : r est une racine A de multiplicité 2 Ssi $(X-r)^2$ divise A

> On dit que : r est une racine A de multiplicité **exactement** 2 Ssi

$$\text{Ssi } A = \underbrace{(X-r)^2 Q}_{\text{CàD } (X-r)^2 \text{ divise } A} \quad \text{et} \quad Q(r) \neq 0.$$

`Ainsi on a` $(X-r)^2$ `divise` A `mais` $(X-r)^3$ `ne divise pas` A

Attention les américains disent multiplicité à la place de multiplicité exacte
donc il peut y avoir confusion.

Théorème. Lorsque l'on connait la factorisation de A
alors on lit les multiplicités et c'est bon.

Exemple $A = 2(X-3)(X+2)^2$, Alors
$r = 3$ est de multiplicité 1
$r = (-2)$ est une racine de multiplicité 2

Vocabulaire
> *Lorsque r est une racine de multiplicité 0 cela signifie qu'elle n'est pas racine!!!!*
> Lorsque r est de multiplicité exact égale à 1, on dit que r est une racine simple.
> Lorsque r est de multiplicité "exact" égale à 2, on dit que r est une racine double.
> Lorsque r est de multiplicité "exact" égale à 3, on dit que r est une racine triple.

Théorème 7. Caractérisation de la multiplicité.
Multiplicité et dérivations.

Soit A un polynôme et $r \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}^*$
Lorsque r est une racine A de multiplicité p
alors r est une racine A' de multiplicité $p-1$. Ici A' c'est le polynôme dérive.

Application. On a équivalence entre
(i) r est une racine de multiplicité p [exact]
(ii) $(X-r)^p$ divise A [et $(X-r)^{p+1}$ ne divise pas A.]
(iii) $A(r) = A'(r) = \ldots = A^{(p-1)}(r) = 0$ [et $A^{(p)}(a) \neq 0$.]

À la recherche des racines multiples.

Soit A un polynôme et $r \in \mathbb{C}$.
On vient de voir que r est une racine multiple,
Ssi $A(r) = 0$ et $A'(r) = 0$
Ainsi on a l'équivalence

$$\left(\begin{array}{l}\text{le polynôme } A \\ \quad \text{admet des racines multiples}\end{array}\right) \Longleftrightarrow \textit{le système} \begin{cases} A(x) = 0 \\ A'(x) = 0 \end{cases} \text{admet des solutions}$$

Application : Lorsque le système n'a pas de solution
alors les racines du polynôme sont simples (et donc 2 à 2 différentes).

Exercice 11. [Correction]

1. Soit A un polynôme de degré 2 et r une racine de A.
   Donner une condition pour que r soit une racine double.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $U_n = (X^2 - 1)^n$
   Montrer que 1 est une racine du polynôme U_n et déterminer sa multiplicité.

Exercice 12. *Applications directes du théorème.*

1. On considère le polynôme $P = aX^2 + bX + c$
   Montrer que le système $[P(X) = 0 \ et \ P'(X) = 0]$ admet des solutions Ssi $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
   Est-cohérent avec notre Kulture commune ?
2. On considère le polynôme $P = X^n - 1$
   Sans calculer les racines, montrer que les racines de P sont simples

Exercice 13. D'après le banque CCP.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Exercice 14. D'après le banque CCP.

Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

3 Factorisation des Polynômes dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $r \in \mathbb{C}$. Le facteur conjugué de $(X-r)$ c'est $X-\overline{r})$

On regroupe les facteurs conjugués, CàD $(X-r)(X-\overline{r})$

On sait que : $(X-r)(X-\overline{r}) = X^2 + X[\qquad] + [\qquad]$

Théorème 8. Théorème de Factorisation dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.

> **Dans $\mathbb{C}$.** Soit A un polynôme à coefficient dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On suppose que $\deg A = n \geqslant 1$.

Alors on peut écrire A comme produit de facteur de degré 1 CàD
il existe $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$
tel que $A = \lambda\,(X-r_1)\,(X-r_2)\ldots(X-r_n)$
De plus il est clair que λ est le coefficient dominant de A.

> **Dans $\mathbb{R}$.** Soit A un polynôme à coefficient dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $\deg A = n \geqslant 1$.

Étape 1 : On applique le théorème précédent
ainsi on obtient une factorisation avec des racines dans $\mathbb{C}$.

Étape 2 : puis on regroupe les facteurs conjugués

Polynôme scindé : On dit que le polynôme A est scindé sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{Q}$)
Ssi les racines de A sont toutes réelles (resp. dans $\mathbb{Q}$).

Exercice 15. Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants

1. X^2-1 et X^2+1.
2. X^3-1 et X^3+1.
3. X^4-1 et X^4+1.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme X^n-1.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $A = (X+1)^n - 1$.

1. Étude de A.
   (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme A et A n'a pas de racine multiple.
   (b) Déterminer les racines de A.
2. Étude de B.
   (a) Démontrer qu'il existe un polynôme B tel que $A = X\,B$.
   Déterminer le degré et le coefficient dominant et le terme constant du polynôme B
   (b) Déterminer les racines de B.

4 Lien coefficient-Racine.

Définition 9. Définition des Fonctions symétriques.

Soit $n \in N^*$ et $r_1, r_2, ..., r_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Pour $k \in \{1, 2, ..n\}$, on définit les nombres σ_k

$$\sigma_k = \text{Somme de tous les paquets de } k \text{ nombres parmi } r_1, r_2, ..., r_n$$

Les σ_k sont appelés les fonctions symétriques.

`Remarque` : Lorsque $r_1, r_2, ..., r_n$ sont les racines d'un polynôme A
on parle des fonctions symétriques des racines de A.

Théorème 10. Lien coefficients-racines

Soit A un polynôme non nul. Je note $n = \deg(A)$.
On peut écrire le polynôme A

> Sous forme développer, CàD avec les coefficients ainsi $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

> Sous forme factoriser, CàD avec les racines ainsi $A = a_n \prod_{k=k}^{n} (X - r_k)$

On compare les coefficients de X^0 et de X^{n-1} dans les 2 formes, on obtient

$$\sigma_1 = r_1 + r_2 + ... + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \sigma_n = r_1 r_2 ... r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Plus généralement, on $\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$

Exercice 17. Deux exemples concrets.

1. **Lorsque** $\deg(A) = 2$. On considère le polynôme

$$A = a(X - r)(X - r') = aX^2 + bX + c$$

Développer $a(X - r)(X - r')$. En déduire $\sigma_1 = r + r'$ et $\sigma_2 = r r'$ en fonction de a, b, c.

2. **Lorsque** $\deg(A) = 3$. On considère le polynôme

$$A = a(X - r)(X - r')(X - r'') = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

Développer $a(X - r)(X - r')(X - r'')$. En déduire σ_1, σ_2 et σ_3 en fonction de a, b, c, d.

5 Polynômes interpolateurs de Lagrange

Théorème 11. Polynôme interpolateur de Lagrange

Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des réels distincts, et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ des réels quelconques.

Alors il existe un et un seul polynôme P de degré $\leqslant n$ et vérifiant $\forall\, i \in \{0, 1, ..., n\}$, $\mathrm{P}(a_i) = b_i$

De plus on connait explicitement ce polynôme, c'est $\mathrm{P(X)} = \sum_{i=0}^{n} b_i\, \mathrm{L}_i(\mathrm{X})$

où L_i est le polynôme $\mathrm{L}_i(\mathrm{X}) = \dfrac{\prod_{j \neq i} (\mathrm{X} - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$

Ce polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange; on dit qu'il interpole les valeurs $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ en les noeuds $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

6 Les exercices de la banque CCP.

Exercice 18. [Correction]

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 19. [Correction]

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor,
   la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, (X-a), (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r
   si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$
   et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$.

1. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine au moins double de P.
2. Dans ce cas, vérifier que le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$.