Autour de Divise.

Exercice 1. [Correction] On suppose que A divise B, montrer que A^2 divise $\left(A'B - AB'\right)$.

Exercice 2. [Correction] Il y a-il un argument de cohérence, CàD sans calcul, pour dire si les égalités suivante sont des division euclidienne ?

$$\underbrace{X^n + X^2 - X + 1}_{A} = \underbrace{X}_{B}\,\underbrace{(X^{n-1} + X)}_{Q} - \underbrace{X + 1}_{R}$$

$$\underbrace{X^n - X + 1}_{A} = \underbrace{X}_{B}\,\underbrace{(X^{n-1} - 1)}_{Q} + \underbrace{1}_{R}$$

$$\underbrace{X^n - X^{n-1} + 1}_{A} = \underbrace{(X-1)}_{B}\,\underbrace{(X^{n-1} - 1)}_{Q} + \underbrace{X}_{R}$$

Exercice 3. [Correction] Déterminer le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Méthodologie.

On déterminer le degré possible de R qui heureusement sera petit puis les coefficients.

1. $A = X^n$ et $B = (X - 42)$.
2. $A = X^n$ et $B = (X-1)(X-2)$.
3. $A = X^n$ et $B = (X-1)^2$.
4. $A = (X+1)^n - X^n - 1$ et $B = X^2 + X + 1$.

Plein de démonstration du théorème sur les racines

Théorème 1. Définition, Caractérisation.

On considère $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On a équivalence entre

(i) r est une racine du polynôme A.

(ii) $A(r) = 0$

(iii) $(X - r)$ divise A.
CàD Il existe un polynôme Q tel que $A = (X - r)\,Q$

Exercice 4. [Correction] *Démonstration de $(ii) \Longrightarrow (iii)$ avec la formule de Taylor.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

Énoncer le théorème de Taylor pour les polynômes (en particulier quelles sont le/les hypothèses du théorème).
En utilisant le théorème de Taylor, trouver P tel que $A = (X - r)\,P$

Exercice 5. *Démonstration de $(ii) \Longrightarrow (iii)$ avec la division euclidienne.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

En suivant la démarche du travail 8, déterminer le reste de la division euclidienne de A pas $(X - r)$.

Exercice 6. [Correction] *Démonstration de $(ii) \Longrightarrow (iii)$ avec le principe de superposition.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

1. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Déterminer un polynôme Q_k tel que $X^k - r^k = (X - r)\,Q_r$.
2. En déduire qu'il existe un polynôme P tel que $A = (X - r)\,P$.

Exercice 7. *Démonstration de $(ii) \Longrightarrow (iii)$ avec l'algèbre linéaire.*
On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.
On considère $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \text{tel que } P(r) = 0\}$

Montrer que H est un ssev strict de $\mathbb{R}_n[X]$. Que peut-on en déduire sur $\dim(H)$?

Montrer que : $\mathscr{B} = \left[(X-r), X(X-r), \dots, X^{n-1}(X-r)\right]$ est une famille libre de H.
Que peut-on en déduire sur $\dim(H)$?

Déterminer $\dim(H)$ puis que $\mathscr{B}$ est une base de H.

En utilisant la base $\mathscr{B}$ montrer (iii)

Factorisation - Rigidité

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit P_n le polynôme

$$P_n = 1 - X + \frac{X(X-1)}{2} - \dots + (-1)^n \frac{X(X-1)\dots(X-(n-1))}{n!}$$

> Calculer et factoriser P_1, P_2, P_3

> À votre avis, quelle est la factorisation de P_n. Démontrer le.

Exercice 9. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré $\leqslant n$.
On suppose que : $\forall\, k \in \{0, 1, \dots, n\},\ P(k) = \dfrac{k}{k+1}$

On va calculer $P(n+1)$

On considère $Q(X) = (X+1)P(X) - X$

1. Vérifier que Q est un polynôme de degré $\leqslant (n+1)$.
2. Trouver ses racines. Écrire sa factorisation et déterminer son coefficient dominant.
3. Calculer $P(n+1)$

Exercice 10. [Correction] **À la recherche de propriétés caractéristiques des polynômes.**
Justifier, avec un RA, qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

1. Pour tout $x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sin(x)$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R},\ P(x) = e^x$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R},\ P(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
4. Pour tout $x \in \mathbb{R},\ P(x) = |x|$

Justifier qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

5. Pour tout $z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{z}$
6. Pour tout $z \in \mathbb{C},\ P(z) = |z|$

Exercice 11. [Correction] Soit P un polynôme 1-périodique CàD vérifiant $P(X+1) = P(X)$

On va montrer que P est constant égale à $P(0)$, CàD $P = P(0)$.

On considère le polynôme $A = P - P(0)$.
Vérifier que 0, 1, 2 sont des racines de A.
Trouver une infinité de racine pour A et conclure.

Multiplicité des racines

Exercice 12. Racine double ?

1. On considère le polynôme $P = aX^2 + bX + c$

   Montrer que le système $[P(X) = 0 \ et \ P'(X) = 0]$ admet des solutions Ssi $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
   Est-cohérent avec notre Kulture commune ?

2. On considère le polynôme $P = X^n - 1$

   Sans calculer les racines, montrer que les racines de P sont simples

Exercice 13. D'après le banque CCP.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $U_n = (X^2 - 1)^n$

1. Montrer que $r = 1$ est une racine du polynôme U_n et déterminer sa multiplicité.
2. Vérifier que : $[U_n]^{(n)}$ est un polynôme de degré n
3. Difficile : En mélangeant Rolle itéré et les propriétés des racines multiple,
   justifier que $\left[U_n\right]^{(n)}$ admet n racine distincte dans $]0,1[$

Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15. Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants

1. $X^2 - 1$ et $X^2 + 1$.
2. $X^3 - 1$ et $X^3 + 1$.
3. $X^4 - 1$ et $X^4 + 1$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^n - 1$.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $A = (X+1)^n - 1$.

1. Étude de A.
   (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme A et A n'a pas de racine multiple.
   (b) Déterminer les racines de A.
2. Étude de B.
   (a) Démontrer qu'il existe un polynôme B tel que $A = XB$.
   Déterminer le degré et le coefficient dominant et le terme constant du polynôme B
   (b) Déterminer les racines de B.

Lien coefficients/Racines

Exercice 17. Deux exemples concrets.

1. **Lorsque** $\deg(A) = 2$. On considère le polynôme
$$A = a(X-r)(X-r') = aX^2 + bX + c$$
Développer $a(X-r)(X-r')$. En déduire $\sigma_1 = r + r'$ et $\sigma_2 = r\,r'$ en fonction de a, b, c.
2. **Lorsque** $\deg(A) = 3$. On considère le polynôme
$$A = a(X-r)(X-r')(X-r'') = aX^3 + bX^2 + cX + d$$
Développer $a(X-r)(X-r')(X-r'')$. En déduire σ_1, σ_2 et σ_3 en fonction de a, b, c, d.

Les exercices de la banque CCP.

Exercice 18. [Correction]

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

1. Soit z un complexe $\neq 0$, alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = r\,e^{i\theta}$
   Le nombre θ c'est un argument de z

   Il n'y a pas unicité.
   $z = r\,e^{i\theta} = r'\,e^{i\theta'}$ Ssi $\theta \equiv \theta' \mod [2\pi]$
2. On sait d'après le lemme de factorisation que le polynôme $X^n - 1$ admet au plus n racines
   L'équation a au plus n solution.
   De plus pour $k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$, on a $r_k = \exp\left(ik\dfrac{2\pi}{n}\right)$ est une solution
   elles sont 2 à 2 distinctes donc on a bien toutes les solutions
3. On résout $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n \iff \begin{cases} U^n = 1 \\ U = \dfrac{z+i}{z-i} \end{cases}$
   Pour démontrer que les racines sont des nombres réels, on factorise l'argument moitié.

Exercice 19. [Correction]

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor,
   la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, (X-a), (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r
   si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$
   et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$.

1. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine au moins double de P.
2. Dans ce cas, vérifier que le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$.

Un exercice

Voici un exercice d'après une sujet des mines d'Ales. Voir le DM 7 donné pour le 12 novembre dernier.

> Question 1 Autour des polynômes : degré, racine avec les racine n-ième et factorisation

> Question 2 Application-Utilisation : Manipulation de produit et Un calcul pas si facile

Exercice 21. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On considère

$$A = (X+1)^{2n} - 1 \quad \text{et} \quad p_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$$

1. Étude du polynôme A.
   (a) Montrer que l'on peut écrire : $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme de plus bas degré noté b_0.
   (b) Déterminer les racines de B dans $\mathbb{C}$.
   Les racines $z_1, .., z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique, i.e. sans les exp.
   (c) Factoriser B en déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$.
2. Etude de p_n
   (a) Montrer, à l'aide d'une ré-indexation, que $p_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$.
   (b) En déduire que, si $q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$, alors $p_n = \sqrt{q_n}$.
   (c) En déduire q_n et enfin p_n.

Problème Classique

Voici un problème classique. Voir le DM 7 donné pour le 12 novembre dernier.

> Partie 1 Autour des polynômes :
Calcul et manipulation de somme, Recherche de racine d'un polynôme avec les racines n-ième et enfin factorisation.

> Partie 2 Une limite : Inégalités classiques, puis gendarmes.

Exercice 22. [Correction]

Partie 1. Autour des polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. on considère le polynôme

$$Q_n(z) = \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right]$$

1. Est ce que 0 est une racine du polynôme Q_n ?
2. Montrer que le polynôme $Q_n(z)$ est pair.
3. Montrer que : $Q_n(z) = \sum\limits_{k=0,\ k impair}^{2n+1} [\cdots] = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p z^{2n-2p}$

   Préciser le degré de Q_n et calculer les coefficients a_{2n} de z^{2n} et a_{2n-2} de z^{2n-2}.
4. À l'aide des racines $(2n+1)$-ième de l'unité, déterminer les racines $r_1, r_2, ...$ de Q_n (Attention le nombre de racine est égale au degré).

   puis exprimer les racines $r_1, r_2, ...$ sans les exponentielles complexes.
5. En utilisant la périodicité de la fonction Tangente, justifier que $r_{n+1} = -r_n$.

   On admettra les autres égalités, CàD $r_{n+2} = -r_{n-1}, ...$

   En déduire que

$$Q_n(X) = (2n+1)\left(X^2 - (r_1)^2\ \right)....\left(X^2 - (r_n)^2\ \right) \quad \text{avec } r_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

6. En développant l'expression factorisée précédente, calculer le coefficient de X^{2n-2} du polynôme Q

$$\text{En déduire que : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

Partie 2. Une limite très classique.

1. Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \sin x \leqslant x \leqslant \tan x.$
2. en déduire que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\tan^2(x)} + 1.$
3. On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$
   (a) A l'aide de l'encadrement précédent construire un encadrement pour S_n.
   (b) En déduire que : $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}.$

Trouver un polynôme

Exercice 23. 1 Soit $P = P(X)$ un polynôme **non nul** vérifiant

$$P\left(X^2\right) = P(X)\,P(X+1)$$

1. Montrer que P est unitaire.

   On suppose que α est une racine dans $\mathbb{C}$ de $P = P(X)$

   Remarque : comme on suppose que α est racine c'est donc une Analye-Synthèse.
   Ainsi l'objectif des prochaines questions est de trouver les valeurs possibles de α

2. On suppose $|\alpha| \underset{Srict}{>} 1$.
   (a) Montrer que α^2 est encore une racine de P.
   (b) Montrer que plus généralement α^{2^n} est encore une racine de P.
   (c) Justifier que les racines sont bien deux à deux différentes. En déduire une absurdité.
   Que peut-on conclure ?

3. Démontrer rapidement en utilisant les même arguments que "On suppose $0 \underset{Srict}{<} |\alpha| \underset{Srict}{<} 1$" est absurde.
   (a) Montrer que $\alpha' = \alpha - 1$ est encore une racine de P et calculer $|\alpha'|$.
   (b) On suppose que $\theta \neq 0,\ \dfrac{\pi}{3}\ ou\ -\dfrac{\pi}{3}$

   Vérifier que $0 \underset{Srict}{<} |\alpha'| \underset{Srict}{<} 1$ ou $1 \underset{Srict}{<} |\alpha'|$
   Conclure à une absurdité.

   (c) On suppose que $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ donc $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}$

   Montrer que $\alpha' = \alpha - 1$ et $\alpha'' = \alpha' - 1 = \alpha - 2$ sont des racines de P.
   Faites un Bô dessin avec : le cercle unité et les complexe $0, 1, \alpha, \alpha'$ et α''.
   Sans forcément justifier les calculs, conclure à une absurdité.

   On montrerai de même que l'hypothèse $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ est absurde. On l'admet.

4. Conclusion :
   (a) À l'aide des questions précédentes,
   montrer que les seules racines possible de $P = P(X)$ sont 0 et 1.

   Écrire la factorisation de P. Attention : N'oublier pas les multiplicité.
   C'est la forme possible de P

   C'est la fin de l'analyse. Donc on va faire la synthèse.

   (b) Finir la synthèse.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

Comme A divise B, il existe un polynôme Q tel que $B = AQ$, ainsi on a

$$A'B - AB' = A'[AQ] - A[AQ]' = A'AQ - A[A'Q + AQ'] = -A^2Q'$$

Donc on a bien A^2 divise $\left(A'B - AB'\right)$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

On compare le degré de B et de R, ainsi on a : Non, Oui, Non.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Rappel : Déterminer un poly c'est : trouver son degré puis ses coefficients.

1. On a $\deg(R) < \deg(B) = 1$ donc $\deg(R) \leqslant 0$, CàD R est un polynôme constant CàD $R = a$.
   Ainsi on a : $X^n = (X - 42)Q + a$.

   > J'applique en $X = 42$

   Conclusion : $R = 42^n$ et on a $X^n = (X - 42)Q(X) + 42^n$

2. C'est un Copier-Collé.
   On a $\deg(R) < \deg(B) = 2$ donc $\deg(R) \leqslant 1$, CàD R est un polynôme constant CàD $R = aX + b$.
   Ainsi on a : $X^n = (X - 1)(X - 2)Q + aX + b$.

   > J'applique en $X = 1$ et en $X = 2$.

   On résout le système, c'est bon mais lourd ! ! !

3. C'est un Copier-Collé.
   On a $\deg(R) < \deg(B) = 2$ donc $\deg(R) \leqslant 1$, CàD R est un polynôme constant CàD $R = aX + b$.
   Ainsi on a : $X^n = (X - 1)^2 Q + aX + b$.

   > J'applique en $X = 1$ et on dérive puis on applique à nouveau en $X = 1$

   On résout le système, c'est bon mais lourd ! ! !

4. C'est un Copier-Collé.
   On a $\deg(R) < \deg(B) = 2$ donc $\deg(R) \leqslant 1$, CàD R est un polynôme constant CàD $R = aX + b$.
   Ainsi on a : $(X + 1)^n - X^n - 1 = (X^2 + X + 1)^2 Q + aX + b$.

   > Comme les 2 racines/zéros de $X^2 + X + 1$ sont $X = j$ et en $X = j^2$.
   > J'applique en $X = j$ et en $X = j^2$, ainsi

   $$\begin{aligned} aj + b &= (j+1)^n - j^n - 1 = (-j^2)^n - j^n - 1 \\ aj^2 + b &= (j^2+1)^n - (j^2)^n - 1 = (-j)^n - (j^2)^n - 1 \end{aligned}$$

   On résout le système, c'est bon mais lourd ! ! !

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) On suppose que $A(r) = 0$ et que $\deg(A) \leqslant n$.

Comme A est un polynôme et $\deg(A) \leqslant n$, on peut la formule de Taylor en r à l'ordre n, ainsi

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{A(r)}_{=0} + A'(r)(X - r) + \cdots + A^{(n)}(r)\frac{(X-r)^n}{n!} \\ &= (X - r)\left[A'(r) + \cdots + A^{(n)}(r)\frac{(X-r)^{n-1}}{n!}\right] \end{aligned}$$

Donc $(X - r)$ se factorise. Yes !

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. Soit $k \in \{1, ..., n\}$. Déterminer un polynôme Q_k tel que $X^k - r^k = (X-r)\,Q_r$.

   Soit $k \in \{1, ..., n\}$. on a

$$X^k - r^k = (X-r)\left[X^{k-1} + r\,X^{k-2} + r^2\,X^{k-3} + \cdots + r^{k-2}\,X + r^{k-1}\right]$$

   Donc $Q_r = X^{k-1} + r\,X^{k-2} + r^2\,X^{k-3} + \cdots + r^{k-2}\,X + r^{k-1}$ convient

2. En déduire qu'il existe un polynôme P tel que $A = (X-r)\,P$.

   Comme P un polynôme $\neq \mathcal{O}$ de degré $\alpha \leqslant n$, ainsi on a peut écrire $P = \sum_0^\alpha a_k X^k$

   De plus on sait $P(r) = 0$. On a maintenant

$$\begin{aligned} P(X) = P(X) - P(0) &= \sum_0^\alpha a_k X^k - \sum_0^\alpha a_k r^k \\ &= \sum_0^\alpha a_k \left[X^k - r^k\right] \\ &= \underbrace{O}_{k=0} + \sum_0^\alpha a_k\,(X-r)\,Q_r \\ &= (X-r) \quad \underbrace{\sum_0^\alpha a_k\,Q_r}_{\textit{Ceci est un poly}} \end{aligned}$$

   Conclusion : $(X-r)$ se factorise YES

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

1. Vérifier que Q est un polynôme de degré $\leqslant (n+1)$.

   Comme P est un polynôme de degré $\leqslant n$. C'est évident

2. Trouver ses racines. Écrire sa factorisation et déterminer son coefficient dominant.

   Pour $k \in \{0, 1, ..., n\}$, on a $Q(k) = (k+1)P(k) - k = (k+1)\dfrac{k}{k+1} - k = 0$

   On a trouvé $(n+1)$ racines et le polynôme Q est de degré $\leqslant n+1$,

$$\text{Ainsi on a } Q(X) = (X+1)P(X) - X = \lambda \prod_{k=0}^n (X-k) \text{ avec } \lambda \text{ le coefficient dominant}$$

   J'applique l'égalité en $X = -1$, ainsi $1 = \lambda \prod_{k=0}^n (-1-k) = \lambda\,(-1)^{n+1}(n+1)!$

$$\text{Conclusion : } \lambda = \frac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!} \text{ et } Q(X) = (X+1)P(X) - X = \frac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!}\prod_{k=0}^n (X-k)$$

3. Calculer $P(n+1)$

   On a $Q(n+1) = (n+2)P(n+1) - (n+1) = \dfrac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!}\prod_{k=0}^n ((n+1)-k) = \dfrac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!}(n+1)! = \dfrac{1}{(-1)^{n+1}} = (-1)^{n+1}$

$$\text{Conclusion : } P(n+1) = \frac{(-1)^{n+1} + (n+1)}{n+2}$$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

Voici des arguments possibles

> Un polynôme admet une infinité de racine
  Donc par contraposée, Si la fonction h admet une infinité de racines/zéros *alors h n'est pas un polynôme.*

> Si h est un polynôme, alors quand on dérive suffisamment on tombe sur la fonction nulle
  Donc par contraposée, Si $h^{(n)}$ n'est jamais la fonction nulle *alors h n'est pas un polynôme.*

> Si h est un polynôme, alors en $\pm\infty$, on a $h(x) \sim a x^\alpha$ et donc $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \ell \neq 0$.
  Donc par contraposée, Si $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$ ou $h(x) \underset{x\to\infty}{\sim} Moche$ *alors h n'est pas un polynôme.*

> Si h est un polynôme, alors la fonction h est $\mathscr{C}^\infty$
  Donc par contraposée, Si la fonction h n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ *alors h n'est pas un polynôme.*

> 2 polynômes qui coïncident sur une infinité de □ sont égaux.
  Donc par un RA si h coïncide avec P_1 sur un domaine et avec P_2 sur un autre domaine *alors h n'est pas un polynôme.*

On considère la fonction h définie par $z\in\mathbb{C},\ h(z)=\overline{z}$

> $\forall x\in\mathbb{R}$, on a $h(x)=\overline{x}=x$. Donc $h=X$ sur $\mathbb{R}$
>
> $\forall x\in i\mathbb{R}$, on a $h(x)=\overline{x}=-x$. Donc $h=-X$ sur $i\mathbb{R}$

À cause du dernier argument, h n'est pas un polynôme ! ! !

On considère la fonction h définie par $z\in\mathbb{C},\ h(z)=|z|$

> $\forall x\in\mathbb{R}_+$, on a $h(x)=|x|=x$. Donc $h=X$ sur $\mathbb{R}_+$
>
> $\forall x\in i\mathbb{R}_-$, on a $h(x)=|x|=-x$. Donc $h=-X$ sur $\mathbb{R}_1$
>
> Et même Bonus : $\forall x\in\mathbb{U}$, on a $h(x)=1$. Donc $h=1=X^0$ sur $\mathbb{U}$

À cause du dernier argument, h n'est pas un polynôme ! ! !

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

Comme $A(0)=0$, donc $r=0$ est bien une racine de A.
Plus généralement, pour tout n, on a

$$A(n+1)=P(n+1)-P(0)=\underbrace{P(n+1)-P(n)}_{=0\ \textit{car 1-périodique}}+P(n)-P(0)=A(n)$$

Ainsi on a $A(n)=A(n-1)=\cdots=A(1)=A(0)$

Conclusion : le polynôme A a une infinité de racines donc A est le polynôme nul
et enfin $A=0\iff P-P(0)=0\iff P=P(0)$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

1. c'est de la culture ! ! On sait
   Lorsque $\Delta\neq 0$ les racines sont distinctes, CàD elles sont simples
   et on n'a la factorisation : $A=a(X-r)(X-r')$

   Lorsque $\Delta=0$ les racines sont confondus, CàD l'unique racine est double
   et on n'a la factorisation : $A=a(X-r)^2$
2. On a $U_n=(X^2-1)^n=(x-1)^n(x-1)^n$.
   Comme on a la factorisation, on connait les multiplicités

Solution de l'exercice 19 (Énoncé)

1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$.
   (a) On note $deg(P)=\alpha$

   $$\begin{aligned}P(X)=P(a+h)&=P(a)+P'(a)h+\cdots+P(n)(a)\frac{h^\alpha}{\alpha!}\\&=P(a)+P'(a)(X-a)+\cdots+P(n)(a)\frac{(X-a)^\alpha}{\alpha!}\end{aligned}$$

   (b) C'est dans le cours
2. Déterminer deux réels a et b tel que $P(1)=0$ et $P'(1)=0$ puis on factorise en remarquant que X se factorise aussi.

Solution de l'exercice 20 (Énoncé)

1. Déterminer deux réels a et b tel que $P(1)=0$ et $P'(1)=0$
2. On fait par récurrence sur n,

   $$H<n>: aX^{n+1}+bX^n+1=(X-1)^2\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$$

   Ou bien on calcule directement $(X^2-2X+1)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$ avec un télescope (méthode de la clef)

Solution de l'exercice 21 (Énoncé)

1. Étude du polynôme A.

(a) Montrer que l'on peut écrire : $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme de plus bas degré noté b_0.

On sait que 1 est racine A car $A(1) = .. = 0$ donc on a bien $A = X.B$. De plus

$$\begin{aligned} A = (X+1)^{2n} - 1 &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - 1 \\ &= \Big(\underbrace{k=0}_{1} + \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^k \Big) - 1 \\ &= X \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^{k-1} =_{p=k-1} X \sum_{p=0}^{2n-1} \binom{2n}{p+1} X^p \end{aligned}$$

On a donc $B = \binom{2n}{2n} X^{2n-1} + \ldots + \binom{2n}{1} = X^{2n-1} + \ldots + 2n$.

Conclusion : degré = 2n-1, coefficient dominant = 1 et $b_0 = 2n$

(b) Déterminer les racines de B dans $\mathbb{C}$.

Les racines $z_1, .., z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique, i.e. sans les exp.

On commence par calculer les racines de A.

$$\text{On a facilement que} \quad A(z) = 0 \iff (z+1)^{2n} - 1 = 0$$
$$\ldots$$
$$\iff z = z_k = -1 + U_k \quad \text{avec} \quad k \in \{0, .., 2n-1\} \text{ et } U_k = \exp\left(\tfrac{2ik\pi}{2n}\right) = \exp\left(\tfrac{ik\pi}{n}\right)$$

On a de plus $A(z) = 0 \iff z = 0$ ou $B(z) = 0$

Comme $z_0 = 0$, les racines de B sont donc $z_1, .., z_{2n-1}$

$$\begin{aligned} \text{Enfin } z_k = U_k - 1 &= \exp\left[\frac{ik\pi}{n}\right] - 1 \\ &\quad \text{argument moitié} \\ &= \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\left[\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right)\right] \\ &= \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\left[2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right] \end{aligned}$$

(c) Factoriser B en déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$.

Maintenant que l'on a racine de B et le coefficient dominant, on peut écrire

$$B(X) = 1(X - z_1)\ldots(X - z_{2n-1}) = X^{2n-1} + \ldots + 2n$$

On applique/évalue en $x = 0$, ainsi $B(0) = 2n = (-z_1)\ldots - z_{2n-1} = (-1)^{2n-1} z_1 \ldots z_{2n-1}$.

$$\text{Conclusion : } \prod_{k=1}^{2n-1} z_k = z_1 \ldots z_{2n-1} = \frac{2n}{(-1)^{2n-1}} = -2n$$

2. Étude de p_n

(a) Montrer, à l'aide d'une ré-indexation, que $p_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$.

On pose $p = 2n - k$, on a alors

$$\begin{aligned} P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} =_{\text{On pose } k=2n-p} \prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-p)\pi}{2n}\right) &= \prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{p\pi}{2n}\right) \\ &= \prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

(b) En déduire que, si $q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$, alors $p_n = \sqrt{q_n}$.

On a maintenant

$$Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}\right).\sin \frac{n\pi}{2n}.\left(\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}\right) = (P_n)^2$$

Comme $P_n > 0$ car $\forall\, k \in \{1,..,n-1\} \sin \frac{k\pi}{2n} > 0$, on a bien $P_n = |P_n| = \sqrt{(P_n)^2} = \sqrt{Q_n}$.

3. En déduire q_n et enfin p_n.

On a

→ D'une part $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = \prod_{k=1}^{2n-1} \left(2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\right)$ $= 2^{2n-1} i^{2n-1}.Q_n.\prod_{k=1}^{2n-1} \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)$

De plus $\prod_{k=1}^{2n-1} \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)$

$$\begin{aligned} &= \exp\left[\tfrac{i\pi}{2n}(1+..+(2n-1))\right] \\ &= \exp\left[\tfrac{i\pi}{2n}\tfrac{(2n-1)(2n)}{2}\right] \\ &= \exp\left[\tfrac{i\pi}{2}(2n-1)\right] = i^{2n-1} \end{aligned}$$

On a donc

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = 2^{2n-1} i^{2n-1}\, i^{2n-1} Q_n = -2^{2n-1} Q_n \qquad \text{car } i^{2n-1} i^{2n-1} = (i\,i)^{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$$

→ D'autre les racines $z_1,..,z_{2n-1}$ sont les racines de B donc $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n$

Conclusion :

$$Q_n = \frac{b_0}{2^{2n-1}} = \frac{2n}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2^{2n-2}} \quad \text{et} \quad P_n = \sqrt{\frac{n}{2^{2n-2}}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

Solution de l'exercice 22 (Énoncé)

1. On a $Q_n(0) = \dfrac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right] = \dfrac{1}{2i}\left[2(i)^{2n+1}\right] = \dfrac{1}{i}\left[i\,(i^2)^n\right] = (-1)^n \neq 0.$
   Donc 0 n'est pas une racine de Q_n.
2. On a $Q_n(-X) = \cdots = Q_n(X)$ donc le polynôme Q_n est pair.
3. Avec le binôme on a

$$\begin{aligned}
Q_n(z) &= \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i)^k(z)^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-i)^k(z)^{2n+1-k}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k \underbrace{\left[1-(-1)^k\right]}_{=\text{ à 0 ou 2 selon parités}}\\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0,\ k\,impair}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k\,2\\
&\qquad \textit{On ré-indexe avec } k=2p+1.\ \textit{C'est possible car } k \textit{ est impair}\\
&= \frac{1}{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(z)^{2n+1-(2p+1)}\underbrace{(i)^{2p+1}}_{=i(-1)^p}\\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\, z^{2n-2p}
\end{aligned}$$

Ainsi

> Sur le plateau $p=0$, on lit coefficient de z^{2n}, c'est $a_{2n} = \dbinom{2n+1}{1} = 2n+1$

> Sur le plateau $p=1$, on lit coefficient de z^{2n-2}, c'est $a_{2n} = -\dbinom{2n+1}{3} = -\dfrac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}$

4. On résout l'équation $Q_n(z) = 0$.

$$\begin{aligned}
Q_n(z) = 0 &\iff (z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0\\
&\iff \left\{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 0\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} U^{2n+1} = 1 & (A)\\ et & \\ \frac{z+i}{z-i} = U & (B)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

> Résolution de (A).

Les solutions sont les racines (2n+1)-ième de l'unité,

CàD $\omega_k = \exp\left(i\,k\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in \{0,..,2n\}$

> Résolution de (B).

On a $\dfrac{z+i}{z-i} = U_k \Leftrightarrow z+i = \omega_k(z-i)$

$\Leftrightarrow z\left(1-\omega_k\right) = -i\left(1+\omega_k\right)$

$\boxed{\text{Situation } \omega_0 = 1}$	$\boxed{\text{Situation } \omega_1,..,\omega_{2n} \neq 1}$
Dans cette situation, l'équation n'a pas de solution en z.	On a $z = r_k = \dfrac{-i\left(1+\omega_k\right)}{1-\omega_k}$ avec $k \in \{1,..,2n\}$

Conclusion : On a $2n$ racines $r_k = \dfrac{-i\left(1+\omega_k\right)}{1-\omega_k}$ avec $k \in \{1,..,2n\}$

De plus pour tout $k \in \{1,..,2n\}$, on a

$$\begin{aligned}
r_k = \frac{-i\left(1+\omega_k\right)}{\left(1-\omega_k\right)} &= \frac{-i\left(1+\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)\right)}{1-\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)}\\
&= \text{Argument Moitié} = \frac{\cos\frac{k\pi}{2n+1}}{\sin\frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{2n+1}}
\end{aligned}$$

5. On remarque que $r_{n+1} = -r_n,\ r_{n+2} = -r_{n-1} \dots$ etc ... on le justifie en utilisant la π-périodicité et l'imparité de tan.
   On a maintenant

$$\begin{aligned}Q_n(X) &= (2n+1)(X-r_1)(X-r_2)\dots(X-r_n)\ \ (X+r_1)(X+r_2)\dots(X+r_n)\\ &= (2n+1)(X-r_1)(X+r_1)\dots(X-r_n)(X+r_n)\\ &= (2n+1)\left(X^2-(r_1)^2\right)\left(X^2-(r_2)^2\right)\dots\left(X^2-(r_n)^2\right)\end{aligned}$$

6. Le coefficient de X^{2n-2} du polynôme Q est égale à

   > D'une part avec la question Q2a., il est égale à : $-\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$

   > D'autre part avec la factorisation de la question Q5, il est égale à : $(2n+1)\left[-r_1^2-\cdots-r_n^2\right]$

   Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = r_1^2+\dots.+r_n^2 = \frac{\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$

7. (a) Convexité.

   (b) On sait que : $0<a<b<c \Longrightarrow 0<a^2<b^2<c^2$, ainsi

$$\begin{aligned}\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ &0<\sin x\leqslant x\leqslant \tan x\\ &\Longrightarrow 0<\sin^2 x\leqslant x^2\leqslant \tan^2 x\\ &\Longrightarrow 0<\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<\frac{1}{\sin^2 x}\\ &\Longrightarrow 0<\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x}\\ &\Longrightarrow 0<\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<1+\frac{1}{\tan^2 x}\end{aligned}$$

   (c) Pour tout $k\in\{1,..,n\}$,alors $0<\dfrac{k\pi}{2n+1}<\dfrac{\pi}{2}$. On applique donc d'après l'inégalité précédente avec $\dfrac{k\pi}{2n+1}$

$$\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\leqslant\left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2\leqslant\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)+1$$

   On somme l'encadrement précédent de $k=1$ à $k=n$ et on utilise $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\frac{n(2n-1)}{3}$, ainsi

$$\frac{n(2n-1)}{3}\leqslant\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 S_n\leqslant\frac{n(2n-1)}{3}+n$$

   (d) On isole S_n puis utilise le théorème d'encadrement.