# Décomposition en elements simples.



## 1 Généralités sur les fractions rationnelles.

### 1.1 Fraction irréductible.

**Définition 1. Qu'est ce qu'une fraction rationnelle**

Une fraction rationnelle $F$ c'est le "quotient" de 2 polynômes, CàD

$$F = \frac{A}{B} \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]^*$$

L'ensemble des polynômes (à coefficient dans $\mathbb{R}$) est noté $\mathbb{R}[X]$.
L'ensemble des fractions rationnelles est noté $\mathbb{R}(X)$.

On sait que les fractions ne s'écrivent pas de façon unique

$$\text{En effet, } \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{15}{10}$$

**Définition 2. Polynôme premier entre eux**

Soit $A$ et $B$ deux polynômes non nul
On dit que $A$, $B$ sont premier entre eux Ssi
les polynômes $A$ et $B$ n'ont pas de racine communes.

**Théorème 3. Fraction irréductible**

On considère une fraction rationnelle $F = {}^{A}/_{B}$

Alors il existe un unique couple $(A_0, B_0)$ des polynômes tel que

> $F = \lambda \dfrac{A_0}{B_0}$

> Les polynômes $A_0$ et $B_0$ sont unitaires et premier entre eux.

`Rappel : premier entre eux` $\iff$ `n'ont pas de racine commune.`

On dit que c'est LA forme irréductible de la fraction $F$.

De plus pour déterminer la fraction irréductible de $F = {}^{A}/_{B}$ ,

- On factorise complètement $A$ et $B$.
- Puis on simplifie les facteurs communs.

Démonstration : Relire la démonstration du même résultat pour les fractions classiques dans $\mathbb{Q}$ et attendre l'arithmétique des polynômes

Exemple: $F(X) = \dfrac{X^2 - 1}{X^2 - 2X + 1} = \dfrac{(X+1)(X-1)}{(X-1)^2} = \dfrac{X+1}{X-1}$

## 1.2 Degré, racine, pôle.

**Définition 4. Degré, racine, pôle**

On considère $F = {}^{A}/_{B}$ une fraction

> **Degré**. Le degré de $F = {}^{A}/_{B}$, noté $\deg(F)$, est défini par

$$\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$$

Remarque : Le degré d'une fraction est bien définie et le formulaire sur le degré fraction est le même que celui du degré des polynômes.

> **Racine et pôle.** *On suppose que* $F = {}^{A}/_{B}$ *est irréductible*

> Les racines $r$ de $F$ sont les racines de $A$.

Ainsi on peut écrire $F = \dfrac{(X-r)^k A_1}{B_1}$ avec $k$ la multiplicité de la racines $r$.

> Les pôles $r$ de $F$ sont les racines de $B$.

Ainsi on peut écrire $F = \dfrac{A_1}{(X-r)^k B_1}$ avec $k$ la multiplicité du pôle $r$.

**Théorème 5. Multiplicité et dérivation**

Soit $F$ une fraction

> On suppose que $r$ est une racine de multiplicité de $k$ de $F$, ainsi on a $F = \dfrac{(X-r)^k A}{B}$

Alors $r$ est une racine de multiplicité de $(k-1)$ de $F'$

> On suppose que $r$ est un pôle de multiplicité de $k$ de $F$, ainsi on a $F = \dfrac{A}{(X-r)^k B}$

Alors $r$ un pôle de multiplicité de $(k+1)$ de $F'$

# 2 Décomposition en éléments simples.

## 2.1 Racines simples

**Théorème 6. Pôles simples (et formule du résidu d'un pôle)**

On considère la fraction

$$F = \frac{X^2+1}{X(X+1)(X-2)} = \frac{A}{B} \qquad \texttt{Ici B n'a que des racines simples.}$$

On constate que la fraction $F$ est irréductible

CAR Comme $B = X(X+1)(X-2)$, les racines de $B$ sont $0, (-1), 2$ et elles ne sont pas des racines de $A = X^2+1$.
Donc $A$ et $B$ sont premiers entre eux.

Alors il existe un unique $(Q, a, b, c) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}^3$ CàD $Q$ un polynôme et $a, b, c$ 3 constantes

$$\text{tel que : } F = Q + \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-2}$$

De plus

> $Q$ est le quotient de la division euclidienne de $A$ par $B$

> Le "résidu" du pôle $r$ vaut $\dfrac{A(r)}{B'(r)}$

Démonstration : On note $n$ le degré du polynôme $A$ et on factorise le polynôme $B = \prod_{k=1}^{p}(X - r_k)$ et on considère les polynômes de Lagrange $B_i$,

$$\text{CàD } \forall i \in \{1, 2, ..., p\},\ B_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{p}(X-k)$$

Existence.
On vérifie avec libre/cardinal/dimension que la famille est $\left(B_1, ..., B_p, B, XB, X^2B, ...., X^{n-p}B\right)$ est une base $\mathbb{R}_n(X)$.
Puis on décompose le polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base et on finit les calculs.

De plus et unicité.
Comme $\frac{A}{B} = Q + \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-2} \iff A = BQ + B \times \left(\frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-2}\right) \iff A = BQ + \underbrace{aB_0 + bB_1 + cB_2}_{\text{C'est un poly de degré} < deg(B)}$

Donc c'est la division euclidienne de $A$ par $B$ et $Q$ est bien le quotient de la division euclidienne.
Pour la formule du "résidu" on calcule la limite de $(x-r)F(x)$ quand $x \to r$
d'une part avec un DL et d'autre part en remplaçant $F$ par sa décomposition
Enfin le "de plus" justifie l'unicité car $Q, a, b, c$ admettent des expressions en fonction de $A$ et $B$ donc il n'y a pas "d'ambigüité".

Voici les utilisations classiques des décomposition en élément simple.

> Calculer des primitives (et parfois des dérivées).

> Calculer des Sommes via les dominos.

> Obtenir de jolies formules

**Exercice 1.** Déterminer une primitive ou calculer l'intégrale

$$\frac{1}{1-x^2},\ \frac{1}{2x^2-3x+1},\ \frac{(x+1)(x+3)}{x(x+2)(x+4)} \text{ et } \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

**Exercice 2.** On considère les sommes $S_n$ et $\Sigma_n$ définie par $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$ et $\Sigma_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)(k+2)}$

1. Calculer $S_n$ puis la limite de la suite $(S_n)$.
2. Calculer $\Sigma_n$ puis la limite de la suite $(\Sigma_n)$.

**Exercice 3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que : $\dfrac{1}{X^n-1} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\omega_k}{X-\omega_k}$ avec $\omega_k = \exp\left(ik\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

## 2.2 Racines multiples.

**Théorème 7. Pôles multiples (et la débrouille)**
On considère la fraction

$$F = \frac{X^6+1}{X^3(X+1)(X+2)^2} = \frac{A}{B} \quad \texttt{Ici B a des racines multiples.}$$

On constate que la fraction $F$ est irréductible

Voir théorème précédent

Alors il existe un unique $(Q, a, a', a'', b, c, c') \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}^6$ CàD un polynôme et 6 constantes

$$\text{tel que : } F = Q + \frac{a}{X} + \frac{a'}{X^2} + + \frac{a''}{X^3} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2} + \frac{c'}{(X+2)^2}$$

et de plus $Q$ est le quotient de la division euclidienne de $A$ par $B$

Démonstration : C'est la même idée que pour les pôles simples sauf que la base est un plus délicate à cause des multiplicités des racines de $B$

**Exercice 4.** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2(x+2)}$

1. Citer le théorème sur l'existence de primitive.
2. Déterminer une primitive sur un $\mathscr{D}$omaine à préciser.

**Exercice 5.** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x^6+1}{x^2(x+1)(x+2)^2}$

1. Citer le théorème sur l'existence de primitive.
2. Déterminer une primitive sur un $\mathscr{D}$omaine à préciser.

### 2.3 Dans $\mathbb{R}(X)$

On décomposée en élément simple, la fraction

$$F = F = \frac{1}{X^3+1}$$

On va appliquer la méthodologie classique.

→ On commence par factoriser le polynôme $B(X) = X^3 + 1$.
On a $X^3 \ +1 = 0$
$\Leftrightarrow X^3 = -1$
$\Leftrightarrow X = -1 \ ou \ X = -j \ ou \ X = -j^2$

$$\text{On a donc la factorisation} \quad X^3 + 1 = 1\,(X+1)\left(X+j\right)\left(X+j^2\right)$$

→ Il est facile de constater que $X^3 - 1$ et 1 n'ont pas de racine commune donc la fraction est irréductible.

→ Comme la fraction $F$ est irréductible, on a sait qu'il existe $Q, a, b, c$ tel que

$$F = F = \frac{1}{X^3+1} = Q + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+j} + \frac{c}{x+j^2}$$

→ En appliquant le cours, on trouve

$$Q = 0$$

$$a = Résidu\ du\ pôle\,(-1) = \frac{A(-1)}{B'(-1)} = \frac{1}{3\,(-1)^2} = \frac{1}{3}$$

$$b = Résidu\ du\ pôle\,(-j) = \frac{A(-j)}{B'(-j)} = \frac{1}{3\,j^2} = \frac{j}{3}$$

$$c = Résidu\ du\ pôle\,(-j^2) = \frac{A(-j^2)}{B'(-j^2)} = \frac{1}{3\,j^4} = \frac{j^2}{3}$$

**Conclusion** : $F = F = \dfrac{1}{X^3+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{j}{X+j} + \dfrac{j^2}{X+j^2}\right)$

→ *Si on doit calculer la dérivée n-ième de F*, alors pas de problème
En effet

$$F^{(n)} = [F]^{(n)} = \left[\frac{1}{X^3+1}\right]^{(n)} = \frac{1}{3}\left(\left[\frac{1}{X+1}\right]^{(n)} + j\left[\frac{1}{X+j}\right]^{(n)} + j^2\left[\frac{1}{X+j^2}\right]^{(n)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n n!}{(X+1)^{n+1}} + j\frac{(-1)^n n!}{\left(X+j\right)^{n+1}} + j^2\frac{(-1)^n n!}{\left(X+j^2\right)^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{3}\left(\frac{1}{(X+1)^{n+1}} + \frac{j}{\left(X+j\right)^{n+1}} + \frac{j^2}{\left(X+j^2\right)^{n+1}}\right)$$

= je sais c'est moche.

→ *Si on doit calculer une primitive de $F(x)$*, c'est très, très embêtant car

$$\frac{1}{x-1} \overset{\text{Une primitive}}{\rightsquigarrow} \ln\left(x-1\right)$$

$$\frac{1}{x-j} \overset{\text{Une primitive}}{\rightsquigarrow} \ln\left(x-j\right) \boxed{\text{MAIS } \ln\left(Complexe\right) \text{ cela n'existe pas}} !!!!!!!$$

Dans cette situation, pour se diriger ver une primitive, on va regrouper les facteurs conjuguées, CàD

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2}\right)$$

On regroupe les facteurs $(X-j)$ et $(X-j^2)$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{j\left(X+j^2\right) + j^2\left(X+j\right)}{\left(X+j\right)\left(X+j^2\right)}\right)$$

On finit les calculs

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{3}\frac{-X+2}{X^2-X+1}$$

Reste à trouver une primitive mais ce n'est pas de tout repos
Voir à la fin.

Il y a un théorème qui donne directement (donc plus rapidement) le résultat.

**Théorème 8. Décomposition en éléments simples dans l'objectif d'un calcul de primitive**

On considère les fractions
$$F = \frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)\left(X+j\right)\left(X+j^2\right)}$$
On constate que la fraction $F$ est irréductible (en effet, pas de racine commune)
On constate que la factorisation est dans $\mathbb{C}$ et qu'on veut une primitive donc on concatène les racines conjuguée, CàD
$$X^3+1 = ..... = (X+1)\left(X^2-X+1\right)$$
Alors il existe un polynôme $Q$ et 3 constantes $a, b, c$ tel que
$$F = Q + \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1} \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}$$
et de plus $Q$ est le quotient de la division euclidienne de $A$ par $B$

J'applique rapidement le théorème. donc je sais que $a, b, c$ existe et je vais les calculer

→ Avec la division euclidienne, on trouve $Q = Q(X) = 0$.

→ Avec la méthode des résidus, on trouve : $a = \dfrac{1}{3}$

→ On calcule la limite de $xf(x)$ quand $x \to +\infty$.

$$\text{D'une part : } xf(x) = x\frac{1}{x^3+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{D'autre part : } xf(x) = x\left(\frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}\right) = \frac{ax}{x-1} + \frac{bx^2+cx}{x^2-x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a+b$$

Donc $b = -a = \dfrac{-1}{3}$

→ On calcule $f(0)$

$$\text{D'une part : } f(0) = \frac{1}{0^3+1} = 1$$

$$\text{D'autre part : } f(0) = \frac{a}{0+1} + \frac{b0+c}{0^2-0+1} = a+c$$

Donc $c = 1 - a = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$$\text{Conclusion : on retrouve bien } F = \frac{1}{X^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{X+1} + \frac{-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}}{X^2-X+1}$$

# 3 Une primitive difficile.

On va déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

> **C'est une fraction rationnelle donc décomposition en éléments simples.**

Comme $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, il n'y a pas de racines dans $\mathbb{R}$, on ne peut pas factoriser (dans $\mathbb{R}$) le trinôme $x^2+x+1$. On va le mettre sous forme canonique

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] \\ &= \frac{3}{4}\left[\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right] \end{aligned}$$

> **Puis Primitive** On a "donc" sur $I$,

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]} \overset{primitive}{--->} \frac{1}{3/4}\,\frac{\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2/\sqrt{3}} \quad ouf, Ouf, OUf, OUF.$$

On va déterminer une primitive de $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$.

> Il y a 2 fonctions telles que $[...]' = \dfrac{Truc}{X^2+X+1}$ Ce sont

$$\ln|X^2+X+1| \text{ et La fonction ci-dessus, CàD } \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

> Comme $\dfrac{x+1}{x^2+x+1} = ....\dfrac{2X+1}{X^2+X+1} + ....\dfrac{1}{X^2+X+1}$

$$\text{Un primitive de } \frac{x+1}{x^2+x+1} = ....\ln|X^2+X+1| + ....\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$