Activité du 07 avril 2025.

1. On veut montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_1^x e^{t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt.$

   Q1 Comment la question s'inscrit dans le cours ?

   Q2 Ici comment ferait-t-on pour répondre à la question ? `Attention conditionnel, CàD ne pas le faire.`

`On admet que :` $\forall x \in [1,+\infty[, \quad \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant \frac{e^{x^2}}{x^2}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$

2. On veut montrer que : $\int_1^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$

   Q1. Que doit-on, que peut-on faire pour démontrer $A \sim B$ ou que $A = o(B)$.

   Q2. La question Q1 et l'objectif suggère que : $\int_1^x e^{t^2}\,dt = \underbrace{\frac{e^{x^2}}{2x}}_{\textit{Le plus GROS du mélange}} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt$

   Que doit-t- faire pour JUSTIFIER que $\frac{e^{x^2}}{2x}$ est plus gros que $\frac{e^{x^2}}{4x^3}$ quand $x \to \infty$? Faites le.

   Que doit-t- faire pour JUSTIFIER que $\frac{e^{x^2}}{2x}$ est plus gros que $\frac{3e}{4}$ quand $x \to \infty$? Faites le.

   Que doit-t- faire pour JUSTIFIER que $\frac{e^{x^2}}{2x}$ est plus gros que $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt$ quand $x \to \infty$? Faites le.

3. On admet que : $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$

On va déterminer un équivalent de $D(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ au voisinage de $+\infty$. *Attention :* $\displaystyle\int_1^x \cdots \neq \int_0^x \cdots$

Q1. Que doit-on, que peut-on faire pour démontrer $A \sim B$ ou que $A = o(B)$?

Q1' Comment l'hypothèse $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$ peut-être utiliser ?

Q2. Déterminer un équivalent de $D(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ au voisinage de $+\infty$.

4. Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. On considère $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,t^n\,dt$

Montrer que : $I_n = \dfrac{f(1)}{n+1} - \displaystyle\int_0^1 f'(t)\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\,dt$

Montrer que : $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{n+1}$ puis $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{n}$

On suppose que f est $\mathscr{C}^2$. Poursuivre le développement.

Activité du 07 avril 2025. Correction

1. On veut montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt.$

   Q1 Comment la question s'inscrit dans le cours ?

   Q2 Ici comment ferait-t-on pour répondre à la question ? `Attention conditionnel, CàD ne pas le faire.`

On veut montrer une égalité

> Entre 2 ensembles avec $\subset$ et $\supset$
> Entre 2 fonctions
> Entre 2 nombres

Entre 2 nombres

> Une inégalité au voisinage
> Il y a des V.A.
> Il y a Somme/Intégrale
> Convexité
> Wikking ou Gros-Petit
> Étude de fonction/Récurrence.

et il y a une intégrale

Avec les intégrale, on dispose
> On distribue, on regroupe, on glue
> IPP et/ou chgt de variable
> Avec une petit primitive
> **Surtout** on sait majorer/minoré/Encadré

`On admet que :` $\forall x \in [1,+\infty[,\quad \displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant \frac{e^{x^2}}{x^2}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$

2. On veut montrer que : $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$

   Q1. Que doit-on, que peut-on faire pour démontrer $A \sim B$ ou que $A = o(B)$.

Pour montrer $A \sim B$

Niveau1 : On fait un développement (et pas forcément un DL),
on obtient $A = B + B' + B'' + B'''$
puis on justifie que $B' = o(B)$ et$B'' = o(B)$,....
Conclusion : le Gros c'est B

Niveau0 : On fait la définition, CàD $Quotient \longrightarrow 1$

Pour montrer $A = o(B)$

Niveau1 : On utilise les règles sur les ODG
et si besoin ${}^{\mathit{Petit}}\rule{3cm}{0.4pt}{}^{\mathit{Gros}}$

Niveau0 : On fait la définition, CàD $Quotient \longrightarrow 0$

Q2. La question Q1 et l'objectif suggère que : $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt = \underbrace{\frac{e^{x^2}}{2x}}_{\textit{Le plus GROS du mélange}} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt$

Que doit-t-on- faire pour JUSTIFIER que $\dfrac{e^{x^2}}{2x}$ est plus gros que $\dfrac{e^{x^2}}{4x^3}$ quand $x \to \infty$? Faites le.

Réponse. $\dfrac{e^{x^2}}{4x^3} \underset{x\to\infty}{=} o\left(\dfrac{e^{x^2}}{2x}\right)$ par croissance comparée classique

Que doit-t-on faire pour JUSTIFIER que $\dfrac{e^{x^2}}{2x}$ est plus gros que $\dfrac{3e}{4}$ quand $x \to \infty$? Faites le.

Réponse. $\dfrac{3e}{4} \underset{x\to\infty}{=} o\left(\dfrac{e^{x^2}}{2x}\right)$ car $\dfrac{3e}{4}$ est une constante et $\dfrac{e^{x^2}}{2x} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$

Que doit-t-on faire pour JUSTIFIER que $\dfrac{e^{x^2}}{2x}$ est plus gros que $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt$ quand $x \to \infty$? Faites le.

Réponse. On montre avec le thm ....., que $Quotient \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

3. On admet que : $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$

On va déterminer un équivalent de $D(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ au voisinage de $+\infty$. *Attention :* $\displaystyle\int_1^x \cdots \neq \int_0^x \cdots$

Q1. Que doit-on, que peut-on faire pour démontrer $A \sim B$ ou que $A = o(B)$?

Un copié/collé de la question Q2.1

Pour montrer $A \sim B$	**Pour montrer** $A = o(B)$
Niveau1 : On fait un développement (et pas forcément un DL), on obtient $A = B + B' + B'' + B'''$ puis on justifie que $B' = o(B)$ et$B'' = o(B)$,.... Conclusion : le Gros c'est B et $A = B[1+o(1)]$ et $A \sim B$	Niveau1 : On utilise les règles sur les ODG et si besoin $\frac{Petit}{Gros}$
Niveau0 : On fait la définition, CàD $Quotient \longrightarrow 1$	Niveau0 : On fait la définition, CàD $Quotient \longrightarrow 0$

Q1' Comment l'hypothèse $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$ peut-être utiliser ?

Niveau1 : On sait que $A \sim B$ se manipule avec $A = B[1+o(1)]$
CàD on remplace A par $B[1+o(1)]$ et on ré-organise/calcule

Niveau autre : J'applique la définition de $Quotient \longrightarrow 1$ avec $\varepsilon > 0$
Ainsi .....J'ai une inégalité au voisinage, à partir d'un rang

Q2. Déterminer un équivalent de $D(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ au voisinage de $+\infty$.

Réponse Pour trouver $D(x) \sim \cdots$, on va faire du Niveau 1

$$D(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt = e^{-x^2}\left[\int_0^1 e^{t^2}\,dt + \int_1^x e^{t^2}\,dt\right]$$

$$\underset{x\to\infty}{=} e^{-x^2}\left[K_{onstante} + \frac{e^{x^2}}{2x}(1+o(1))\right]$$

Or $K_{onstante} = o\left(\dfrac{e^{x^2}}{2x}\right)$ croissance comparée

$$= e^{-x^2}\frac{e^{x^2}}{2x}(1+o(1))$$

$$= \frac{1}{2x}(1+o(1)) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

4. Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. On considère $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,t^n\,dt$

Montrer que : $I_n = \dfrac{f(1)}{n+1} - \displaystyle\int_0^1 f'(t)\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\,dt$

Montrer que : $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{n+1}$ puis $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{n}$

On suppose que f est $\mathscr{C}^2$. Poursuivre le développement.