Activité du 08 avril 2025.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base classique.

On considère les fonctions suivantes

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \; ; \; P \longmapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$$
$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \; ; \; P \longmapsto P(1)$$

On convient que $f^0 = id$ et que $f^n = f \circ \ldots \circ f$

1. Autour de ϕ.

   Objectif : Justifier que ϕ est un morphisme de $\mathbb{R}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   Q1 Donner la définition de ϕ est un morphisme de $\mathbb{R}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Q2. Quelles sont les méthodes pour justifier que ϕ est un morphisme ?
   Niveau 0, Niveau 1, Niveau 2
   Q3. Quelles sont les méthodes pour justifier que à valeur dans $\mathbb{R}$

   Objectif : Étude de $\mathrm{Im}(\phi)$.

   Q1 Donner la définition de $\mathrm{Im}(\phi)$.
   Q2. Donner les propriétés de $\mathrm{Im}(\phi)$.
   Q3. Quelles la meilleur méthode pour déterminer $\mathrm{Im}(\phi)$.
   Q4. Application : En ce que ϕ est le morphisme nul ? En déduire que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}$.

   Objectif : Étude de $\ker(\phi)$.

   Q1 Donner la définition de $\ker(\phi)$.
   Q2. Donner les propriétés de $\ker(\phi)$.
   Q3. Quelles la meilleur méthode pour déterminer $\ker(\phi)$.
   Q4. Application : Déterminer une base et la dimension du noyau.

2. Autour de f

   Q1. Donner la définition de ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2(\mathbb{R})$.
   `On admet que :` f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Fabriquer une base.
   Soit les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = -2X + 1$, $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$ et la famille $\mathscr{C} = (P_0, P_1, P_2)$.

   (a) **Objectif :** Justifier que : $\mathscr{C} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Q1 Quelles sont les méthodes pour justifier que : $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Niveau 0, Niveau 1, Niveau 2
   Q2 Quelles sont les méthodes pour justifier qu'une famille est libre ?
   Raccourcie ou pas.
   Q3 Montrer que : $\mathscr{C} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) **Objectif :** les ssev $E_\lambda = \ker\left(f - \lambda\, id\right)$

   Q1. Donner les propriétés E_λ et compléter : $P \in E_\lambda \iff$ ....
   Q2. Que doit-on faire pour justifier que : $P_0 \in E_1$, que $P_1 \in E_{1/2}$ et que $P_1 \in E_{1/4}$
   `On admet que` $P_0 \in E_1$, `que` $P_1 \in E_{1/2}$ `et que` $P_1 \in E_{1/4}$

4. **Objectif :** Utiliser une base.

   Q1. À quoi sert une base ?
   Q2. Comment on trouve facilement des coordonnées dans une base ?
   Application : Soit le polynôme $P = a + bX + cX^2$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{C}$
   Q3. Calculer (ou pas) $[\phi \circ f^n](P)$ en fonction de a, b, c. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} [\phi \circ f^n](P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$

L'exercice original.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base classique.

On considère les fonctions suivantes

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \ ; \ P \longmapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$$

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \ ; \ P \longmapsto P(1)$$

On convient que $f^0 = id$ et que $f^n = f \circ \ldots \circ f$

1. Justifier que ϕ est un morphisme de $\mathbb{R}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   En ce que ϕ est le morphisme nul? En déduire que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}$.

   Déterminer une base et la dimension du noyau.

2. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Soit les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = -2X + 1$, $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$.
   (a) Justifier que : $\mathscr{C} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) On note $E_\lambda = \ker\left(f - \lambda\, id\right)$

   Calculer $f(P_0), f(P_1), f(P_3)$ en fonction de P_0, P_1 et P_2

   En déduire que $P_0 \in E_1$, que $P_1 \in E_{1/2}$ et que $P_1 \in E_{1/4}$

4. Soit le polynôme $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{C}$
   (b) En utilisant la question Q3b., calculer $[\phi \circ f^n](P)$ en fonction de a, b, c.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} [\phi \circ f^n](P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$