

Programme de colle de la semaine 24

du Lundi 14 Avril au Vendredi 18 Avril.

Questions de cours : Manipulation des bases.

> **Plus facile** . Soit les polynômes $P_0 = 1, P_1 = -2X + 1, P_2 = 6X^2 - 6X + 1$ et la famille $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$.

Montrer que \mathcal{C} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et décomposer $P = aX^2 + bX + c$ dans cette base.

> Démonstration de la factorisation de $(X - r)$. Soit A un polynôme.

On suppose que $A(r) = 0$. En utilisant la famille $\mathcal{B} = \{X^0, (X - r), X(X - r), \dots, X(X - r)^{\alpha-1}\}$,
montrer que $(X - r)$ divise $A(X)$

> Démonstration de la division euclidienne. Soit A, B deux polynômes avec $B \neq 0$.

En utilisant la famille $\mathcal{B} = \{X^0, X^1, \dots, X^{\beta-1}, B, X.B, X^2.B, \dots, X^{\alpha-\beta}.B\}$,
montrer qu'il existe 2 polynômes Q, R tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$

> **Plus difficile** . Démonstration du DES On considère $F = \frac{2X+3}{X(X+1)(X-1)}$

En utilisant la famille $\mathcal{B} = \{(X+1)(X-1), X(X-1), X(X+1), X(X+1)(X-1), X^2(X+1)(X-1)\}$,
montrer qu'il existe Q, a, b, c tel que $F = \frac{2X+3}{X(X+1)(X-1)} = Q(X) + \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-1}$

Questions de cours : Écrire des matrices. On admet que les fonctions sont linéaires

Écrire la représentation matricielle d'une des fonctions suivantes

$$> f : \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{R}) ; M \mapsto M^T$$

$$> f : \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} ; M \mapsto \text{tr}(AM) \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$> f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] ; P \mapsto \frac{1}{2} \left[P \left(\frac{X}{2} \right) + P \left(\frac{X+1}{2} \right) \right]$$

Exercices

Des exercices avec des représentations matricielles. (Je fais les changements de base Mardi matin).