Activité du 15 avril 2025.

Exercice 1. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit h la fonction de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ h(P) = 2(X+1)P - \left(X^2 - 2X + 1\right)P'.$$

1. Montrer que $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
2. Calcul dans $\mathscr{B}$

   Calculer $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(h)$.

   Est ce que h est un automorphisme ?
3. Calcul dans $\mathbb{C}$

   Montrer que $\mathscr{C} = \left[1, X-1, (X-1)^2\right]$ est une base.

   Calculer $B = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(h)$.
4. Donner le lien matriciel qu'il y a entre $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
5. **En déduire** que $(h - 4id)^3 = \mathscr{O}$. Que pourrait-on faire de cet information ?

Correction

1. Montrer que $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$. On doit montrer linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$

   Linéaire?.

   On a bien $h(\mathscr{O}) = \mathscr{O}$.

   Pour tout λ, μ et tout $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned} h\left(\lambda P + \mu Q\right) &= 2(X+1)\left[\lambda P + \mu Q\right] - \left(X^2 - 2X + 1\right)\left[\lambda P + \mu Q\right]' \\ &== 2(X+1)\left[\lambda P + \mu Q\right] - \left(X^2 - 2X + 1\right)\left[\lambda P' + \mu Q'\right] \\ &= \lambda\left[2(X+1)P - \left(X^2 - 2X + 1\right)P'\right] + \mu\left[2(X+1)Q - \left(X^2 - 2X + 1\right)Q'\right] \\ &= \lambda h(Q) + \mu h(P) \end{aligned}$$

   À valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$?.

   Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire $P = aX^2 + bX + c$ et

$$\begin{aligned} h(P) &= 2(X+1)P - \left(X^2 - 2X + 1\right)P' \\ &= 2(X+1)\left[aX_2 + \cdots\right] - \left(X^2 - 2X + 1\right)\left[2X + \cdots\right] \\ &= X^3\left[2a - 2a\right] + \text{Coef de degré} \leqslant 2 \qquad \boxed{\text{donc } h(P) \in \mathbb{R}_2[X]} \end{aligned}$$

2. Calcul dans $\mathscr{B}$

   Calculer $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(h)$

   Pour écrire A, on a besoin de

   > $h(X^0) = 2(X+1)X^0 - \left(X^2 - 2X + 1\right)\mathscr{O} = 2X^0 + 2X^1 + 0X^2$

   > $h(X^1) = 2(X+1)X^1 - \left(X^2 - 2X + 1\right)1 = (-1)X^0 + 4X^1 + 1X^2$

   > $h(X^2) = 2(X+1)X^2 - \left(X^2 - 2X + 1\right)2X = 0X^0 + (-2)X^1 + 6X^2$

$$\text{Conclusion : } A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(h) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

   Est ce que h est un automorphisme?

   Comme $\det(A) = \cdots = 64 \neq 0$ donc A est inversible et h est bijectif, ainsi h est un automorphisme

3. Calcul dans $\mathscr{C}$

Montrer que $\mathscr{C} = \left[1, X-1, (X-1)^2\right]$ est une base.

Soit P la matrice de passage. On a $P = \mathscr{M}at(\mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $\det(P) = 1 \neq 0$ donc P est inversible et $\mathscr{C}$ est une base

Calculer $B = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(h)$.

Pour écrire B, on a besoin des coordonnées de $h(X^0)$, $h(X-1)$ et $h(X^2-2X+1)$ dans la base $\mathscr{C} = \left[1, X-1, (X-1)^2\right]$

$> h(X^0) = 2(X+1)X^0 - \left(X^2-2X+1\right)\mathscr{O} = 2(X+1) = 4X^0 + 2(X-1) + 0(X-1)^2$

$$> h(X-1) = A.\vec{U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overset{0}{\ldots} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{4}{\ldots} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{1}{\ldots} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$> h(X^2-2X+1) =$ *À faire avec la méthode de votre choix*

$$\text{Conclusion : } B = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(h) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Donner le lien matriciel qu'il y a entre $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

La formule de changement de base est

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(h) = \mathscr{M}at(\mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C})\,\mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(h)\mathscr{M}at(\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{B}), \text{ CàD } A = PBP^{-1}$$

5. En déduire que $(h-4id)^3 = \mathscr{O}$.

On a $(h-4id)^3 = \mathscr{O} \iff (A+4I_3)^3 = \mathscr{O} \iff (B+4I_3)^3 = \mathscr{O}$

Il est clair que la matrice B est plus "sympa", on va l'utiliser

On a facilement $B - 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (B+4I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Conclusion : $(B+4I_3)^3 = \mathscr{O}$ ainsi on a bien $(h-4id)^3 = \mathscr{O}$