Exercice 1. [Correction]
On considère les fonctions *numérique* $f : x \longmapsto e^{-x}$, $g : x \longmapsto e^{-x}\cos(x)$ et $h : x \longmapsto e^{-x}\sin(x)$
et on note $E = Vect\big(f, g, h\big)$

On considère la fonction Δ définie par $\forall\, u \in E,\ \Delta(u) = u'$

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = \big(f, g, h\big)$ est libre puis que c'est une base de E.
2. `On admet que la fonction` Δ `est linéaire.`
   Montrer que la fonction Δ est à valeurs dans E.
3. Déterminer $A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(\Delta)$
4. On considère $\phi_1 : x \longmapsto e^{(-1+i)x}$ et $\phi_2 : x \longmapsto e^{(-1-i)x}$
   > Justifier que : $\phi_1 \in E$. `On admet que de même` $\phi_2 \in E$
   > Justifier que $\mathscr{C} = \big(f, \phi_1, \phi_2\big)$ est une base de E.
5. Déterminer $D = \mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(\Delta)$
6. En notant que la matrice A est diagonale par bloc, justifier que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}
   Application : En déduire une primitive de $e^{-x}\cos(x)$

Correction

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = \big(f, g, h\big)$ est une base de E.
   Comme $E = Vect\big(f, g, h\big)$, la famille est génératrice.
   Libre ?
   On suppose que $af + bg + ch = \mathscr{O}$
   On va montrer que $a = b = c = 0$
   Comme $af + bg + ch = \mathscr{O}$,
   on a $\forall\, x \in \mathbb{R},\ af(x) + bg(x) + ch(x) = ae^{-x} + be^{-x}\cos(x) + ce^{-x}\sin(x) = 0$
   J'applique en $x = 0$ et $x = \pi$ ainsi $a + b = 0$ et $a - b = 0$
   Donc $a = b = 0$
   On applique maintenant en $\times = {}^{\pi}/_{2}$ donc $c = 0$
   Conclusion : la famille est libre et génératrice donc c'est une base de E est $\dim(E) = 3$
2. Montrer que la fonction Δ est à valeurs dans E.
   Pour tout $u \in E$, on sait qu'il existe a, b, c tel que $u = af + bg + ch$
   On a $D(u) = D\big(af + bg + ch\big)$
   $= aD(f) + bD(g) + cD(h)$
   $= a(-f) + b(-g - h) + c(-h + g)$
   $= [-a]\,f + [-b + c]\,g + [-b - c]\,h \in vect(f, g, h) = E$
   Conclusion : la fonction Δ est à valeurs dans E.
3. Déterminer $A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(\Delta)$
   On a
   > $\forall\, x,\ \big[e^{-x}\big]' = -e^{-x}$ donc $D(f) = -f$
   > $\forall\, x,\ \big[e^{-x}\cos(x)\big]' = -e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x)$ donc $D(g) = -g - h$
   > $\forall\, x,\ \big[e^{-x}\sin(x)\big]' = -e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x)$ donc $D(g) = -h + g$
   Conclusion : $A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(\Delta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

4. On considère $\phi_1 : x \longmapsto e^{(-1+i)x}$ et $\phi_2 : x \longmapsto e^{(-1-i)x}$

   > Justifier que : $\phi_1 \in E$. On admet que de même $\phi_2 \in E$

   On a $\forall x,\ e^{(-1+i)x} = e^{-x}e^{ix} = \underbrace{e^{-x}\cos(x)}_{=g} + i\,\underbrace{e^{-x}\sin(x)}_{=h}$ donc $\phi_1 = g + i\,h \in vect(f,g,h) = E$

   > Justifier que $\mathscr{C} = \left(f,\phi_1,\phi_2\right)$ est une base de E.

   On a $\overrightarrow{C} = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C_1} = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(\phi_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{C_2} = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(\phi_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$

   Les vecteurs colonnes $\left(\overrightarrow{C},\overrightarrow{C_1},\overrightarrow{C_2}\right)$ forme une famille libre car $\det \neq 0$,

   donc la famille $\mathscr{C}$ est libre, dans E et cardinal=3=dimension

   Conclusion : c'est une base.

5. Déterminer $D = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(\Delta)$

   On a

   > $\forall x,\ \left[e^{-x}\right]' = -e^{-x}$ donc $D(f) = -f$

   > $\forall x,\ \left[e^{(-1+i)x}\right]' = (-1+i)e^{(-1+i)x}$ donc $D(\phi_1) = (-1+i)\phi_1$

   > $\forall x,\ \left[e^{(-1-i)x}\right]' = (-1-i)e^{(-1-i)x}$ donc $D(\phi_2) = (-1-i)\phi_2$

   Conclusion : $D = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(\Delta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & -1-i \end{pmatrix}$

6. En notant que la matrice A est diagonale par bloc, justifier que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}
   Application : En déduire une primitive de $e^{-x}\cos(x)$

   On a $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det(1).\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1.(1+1) = 2 \neq 0$

   Donc la matrice A est inversible et on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

   Une primitive de $e^{-x}\cos(x)$ se lit sur la 2-ième colonne, c'est $\dfrac{-1}{2}e^{-x}\cos(x) + \dfrac{1}{2}e^{-x}\sin(x)$

Exercice 2. [Correction] Soit n un entier $\geqslant 2$.

On sait que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension n^2.
Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, CàD un ssev de dimension n^2-1

On suppose que l'hyperplan H ne contient aucune matrice inversible.

1. On va montrer que : $H \oplus vect(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   > Méthode 1 : En notant que : $H \neq H + vect(I_n)$, montrer que $H + vect(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis conclure.

   > Méthode 2 : Montrer qu'une base de H complétée avec I_n est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis conclure.

   > Méthode 3 : Justifier, CàD ne pas affirmer, que $H \cap vect(I_n) = \{\overrightarrow{\mathscr{O}}\}$ puis conclure.
2. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.
   (a) Soit $a \neq 0$. Montrer que : $aI_n + N$ est une matrice inversible. *Indication : Utiliser la formule des sommes géo*
   (b) En déduire que $N \in H$. *Indication : On commencera que :* $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus vect(I_n)$, ainsi on peut écrire ...
3. On admet que : Lorsque $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ avec $i \neq j$ alors E_{ij} est nilpotente
   > Écrire la matrice $A = E_{12} + E_{23} + E_{34} + \cdots + E_{(n-1),n} + E_{n1}$
   > Justifier que A est une matrice inversible et que $A \in H$. OUPS ! ! !
4. Qu'a-t-on a démontré ?

1. On va montrer que : $H \oplus vect(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   > Méthode 1 : En notant que : $H \neq H + vect(I_n)$, montrer que $H + vect(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis conclure.

   I_n est une matrice inversible donc $I_n \notin H$ donc $H \subsetneq H + vect(I_n)$,
   Ainsi $\dim(H + vect(I_n)) \underset{Strict}{>} \dim(H) = n^2 - 1$
   De plus $H + vect(I_n)$ est un ssev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$
   Conclusion : $H + vect(I_n) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\dim(H + vect(I_n)) = n^2$
   Enfin avec Grassmann, on justifie que $H \cap vect(I_n) = \{\overrightarrow{\mathscr{O}}\}$. Conclusion : $H \oplus vect(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   > Méthode 2 : Montrer qu'une base de H complétée avec I_n est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis conclure.

   Soit $\{h_1, ..., h_{n^2-1}\}$ une base de H. On va montrer que $\{h_1, ..., h_{n^2-1}, I_n\}$ est une famille libre.

   On suppose que $\sum_{k=1}^{n^2-1} \lambda_k \overrightarrow{h_k} + \alpha I_n = \mathscr{O}$

   RA : Si $\alpha \neq 0$ alors $\alpha I_n = -\sum_{k=1}^{n^2-1} \lambda_k \overrightarrow{h_k} \in H$
   Oups car αI_n est inversible.
   Conclusion : $\alpha = 0$. Les autres scalaire sont nul car la famille $\{h_1, ..., h_{n^2-1}\}$ est libre.
   On conclut avec : Libre+cardinal+dimension.
   Conclusion : Comme une base de H complétée avec I_n est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on sait que $H \oplus vect(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   > Méthode 3 : Justifier, CàD ne pas affirmer, que $H \cap vect(I_n) = \{\overrightarrow{\mathscr{O}}\}$ puis conclure.

   Soit $M \in H \cap vect(I_n)$. Ainsi il existe α tel que $M = \alpha I_n$
   RA : Si $\alpha \neq 0$ alors $M = \alpha I_n$ est inversible et $M \in H$ OUPS
   Conclusion : $\alpha = 0$ et $M = \alpha \in = \mathscr{O}$.
   Enfin avec Grassmann, on justifie que $H + vect(I_n)$ est de dimension n^2 et égal à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   Conclusion : $H \oplus vect(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.

   (a) Soit $a \neq 0$. Montrer que : $aI_n + N$ est une matrice inversible.

   Soit p l'ordre de nilpotence de N. On sait que : $(1-X)\left[1+X+\cdots+X^{p-1} = 1-X^p\right]$

   On a $aI_n + N = a\left(I - \dfrac{-N}{a}\right)$.

   On applique avec $X = \dfrac{N}{a}$, ainsi $\left(I - \dfrac{-N}{a}\right)\left[I + \dfrac{-N}{a} + \cdots + \dfrac{(-N)^{p-1}}{a^{p-1}}\right] = I_n - \dfrac{(-N)^p}{a^p} = I_n$

   Conclusion : la matrice $aI_n + N$ est bien inversible

   (b) En déduire que $N \in H$.

   Comme $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus vect(I_n)$, ainsi $\exists!(M,\alpha) \in H \times vect(I_n)$ tel que $N = M + \alpha\, I_n$.

   RA. On suppose que $\alpha \neq 0$, alors $M = \underbrace{-\alpha}_{\neq 0} I_n + N$ est inversible et $M \in H$ OUPS ! ! !

   Conclusion : $N = M + 0\, I_n = M \in H$

3. `On admet que : Lorsque` $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ `avec` $i \neq j$ `alors` E_{ij} `est nilpotente`

   > Écrire la matrice $A = E_{12} + E_{23} + E_{34} + \cdots + E_{(n-1),n} + E_{n1}$

   > Justifier que A est une matrice inversible et que $A \in H$. OUPS ! ! !

   Comme $\det(A) =$ *On développe par rapport à la 1-ère colonne* $= (-1)^{n+1} \neq 0$ la matrice est inversible.

   E_{12}, E_{23}, E_{34},...., $E_{(n-1),n}$, E_{n1} sont nilpotentes donc dans H ET H est un ssev

   Conclusion : $A = E_{12} + E_{23} + E_{34} + \cdots + E_{(n-1),n} + E_{n1} \in H$ OUPS

4. Qu'a-t-on a démontré ?

   On a démontré que : tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible.