Matrice d'un morphisme

Exercice 1. [Correction]

Pour les fonction suivantes, je sais > Qui est $\mathscr{D}$
> Qui est $\mathscr{A}$
> Justifier qu'elle est linéaires *et je le fais si ça semble louche*.

Écrire les matrices (dans les bases canoniques) des morphismes suivants

1. La fonction nulle.
2. La fonction id.
3. De l'homothétie vectorielle de rapport k.
4. $f : (x, y, z) \longmapsto (y - z, z - x, x - y)$
5. $h_A : \mathcal{M}_{31} : \overrightarrow{U} \longmapsto A\overrightarrow{U} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
6. $f : P \longmapsto P'$
7. $f : P \longmapsto (P(1), P(2), P(3))$
8. $f : M \longmapsto M^T$
9. $f : M \longmapsto tr(AM)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base classique.

On considère les fonctions suivantes

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \ ; \ P \longmapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$$

`On a admet que` f `est un endomorphisme de` $\mathbb{R}_2[X]$

1. Déterminer $A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
2. En utilisant la matrice A, déterminer P_0 une base et la dimension de $E_1 = \ker(f - 1\,id)$.
3. En utilisant la matrice A, déterminer P_1 une base et la dimension de $E_{1/2} = \ker\left(f - {}^1/_2\ id\right)$.
4. En utilisant la matrice A, déterminer P_2 une base et la dimension de $E_{1/4} = \ker\left(f - {}^1/_4\ id\right)$.
5. Justifier que $\mathscr{C} = \{P_0, P_1, P_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Déterminer $B = \mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(f)$

Exercice 3. [Correction] Soit h le morphisme $h : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2; P \longmapsto (P(1) - P'(1), P(2))$.

Déterminer A la matrice (dans les bases canoniques) de h.
En utilisant A déterminer une base et la dimension du noyau de h.

Exercice 4. [Correction] Soit h la fonction $h : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]; P \longmapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que h est endomorphisme $\mathbb{R}_3[X]$ et que plus précisément h est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$
2. Déterminer A la matrice (dans la base canonique) de h.
3. Approche 1 : Déterminer $\ker(h) = \mathbb{R}_0[X]$ puis montrer que $\text{Im}(h) = \mathbb{R}_2[X]$
4. Approche 2 : Justifier que $\dim(\text{Im}(h)) = 3$. En déduire que $\text{Im}(h) = \mathbb{R}_2[X]$ puis que $\ker(h) = \mathbb{R}_0[X]$.
5. Complément Reprendre et adapter l'exercice avec $\mathbb{R}_n[X]$ à la place de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 5. [Correction] Soit h la fonction $h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); M \longmapsto AM - MA$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que h est endomorphisme et déterminer A la matrice (dans les bases canoniques) de h.
2. En déduire $rg(h)$ et $\dim(ker(h))$.
3. En déduire que (I_2, A) est une base de $com(A) = \ker(h)$.
   Que peut-on en déduire sur A^2 ou A^3 ou ... A^n ou A^{-1} .

Exercice 6. [Correction] On considère $E = Vect\,(\sin(x)\,,\, x\sin(x)\,,\, \cos(x)\,,\, x\cos(x)\,)$
On considère l'application D qui, à une fonction $f \in E$, associe sa fonction dérivée f'.
On a donc

$$\forall\ f \in E, \quad D(f) = f'$$

1. **Base/CL.**
   (a) Montrer que D est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que $\mathscr{B} = (\sin(x)\,,\, x\sin(x)\,,\, \cos(x)\,,\, x\cos(x)\,)$ est une base de E.
   (c) Montrer que les fonctions constantes non-nulle n'appartiennent pas E.
2. **Sans les matrices.**
   (a) Résoudre l'équation différentielle $y' = 0$
   En déduire que D est injective puis que c'est un automorphisme de E.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
   En déduire une base de $\ker(D^2 + id)$. Rappel : $D^2 = D \circ D$.
3. **Avec les matrices**
   (a) Déterminer $A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D)$.
   Retrouver que D est un automorphisme de E.
   (b) Déterminer $B = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D^2 + id)$. Rappel : $D^2 = D \circ D$.
   En déduire une base de $\ker(D^2 + id)$.
   (c) Calculer B^2.
   Retrouver que A est un inversible et déterminer A^{-1} en fonction A.
   Déterminer D^{-1} en fonction D.
4. **Changement de base.** On considère la famille $\mathscr{C} = \left(e^{ix}\,,\, x\,e^{ix}\,,\, e^{-ix}\,,\, x\,e^{-ix}\right)$
   (a) Déterminer la matrice de passage $P = \mathcal{M}at(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$. Rappel : Les nouvô en hô.
   En déduire que la famille $\mathscr{C}$ est une base E.
   (b) Déterminer $A' = \mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(D)$. Donner le lien entre A, A' et P
   (c) En remarquant que A' est diagonale par bloc, calculer $(A')^n$.
   Comment calculerai-t-on A^n et expliquer pourquoi on ne la fera pas.

Bonus

Exercice 7. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, tel que

$$P(a) = f(a) \quad P(b) = f(b) \quad P'(a) = f'(a) \quad et \quad P'(b) = f'(b)$$

Kulture : La fonction P est appelée spline de f sur $[a;b]$.

Exercice 8. Montrer que la famille

$$\Big((X+2)(X+3), (X+1)(X+3), (X+1)(X+2), (X+1)(X+2)(X+3), X(X+1)(X+2)(X+3)\Big)$$

est une base de $\mathbb{R}_4[X]$

Exercice 9. Dans le DES
Démontrer l'unicité. Démontrer que Q est le quotient de la division euclidienne. Démontrer la formule des résidus

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. $\mathcal{M}at(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\mathcal{M}at(h) = A$
3. $\mathcal{M}at(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\mathcal{M}at(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
5. $\mathcal{M}at(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\mathcal{M}at(h) = (1, 1, 1, 1)$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

On a

$$A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(h) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} h(X^0) & h(X^1) & h(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \overrightarrow{i} \\ \leftarrow \overrightarrow{j} \end{array} \end{array}$$

Solution de l'exercice 4 **(Énoncé)**

1. Montrer que h est endomorphisme $\mathbb{R}_3[X]$ et que plus précisément h est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$
2. On a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} h(X^0) & h(X^1) & h(X^2) & h(X^3) \end{array} \\ A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(h) = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow X^0 \\ \leftarrow X^1 \\ \leftarrow X^2 \\ \leftarrow X^3 \end{array} \end{array}$$

   En déduire $rg(h)$
3. En déduire que $\text{Im}(h) = \mathbb{R}_2[X]$ et $\ker(h) = \mathbb{R}_0[X]$
4. Complément

   > La linéarité est facile.

   > De plus h est à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, en effet

$$\begin{aligned} h(P) = P(X+1) - P(X) &= [a(X+1)^n + \cdots] - [a\,x^n + \cdots] & (1) \\ &= [a\,x^n + \cdots] - [a\,x^n + \cdots] = \underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{\text{Des termes de deg} \leqslant n-1} & (2) \end{aligned}$$

   > On a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} h(X^0) & h(X^1) & h(X^2) & h(X^3) & \cdots & h(X^n) \end{array} \\ A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(h) = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \cdots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow X^0 \\ \leftarrow X^1 \\ \leftarrow X^2 \\ \vdots \\ \leftarrow X^{n-1} \\ \leftarrow X^n \end{array} \end{array}$$

   Comme la matrice est déjà triangulaire et de taille $(b+1)\times(n+1)$, ainsi on a $rg(h) = rg(A) = n$.

   > On a maintenant $\text{Im}(h) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\dim(\text{Im}(h)) = rg(h) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$

   Donc $\text{Im}(h) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   Avec le théorème du rang, on a $\dim(Ker(h)) = 0$ et on lit sur la matrice A que $h(X^0) = 0$

   Donc X^0 est un vecteur non nul de $\ker(h)$, c'est donc une base et $\ker(h) = Vect(X^0) = \mathbb{R}_0[X]$.

Solution de l'exercice 5 **(Énoncé)**

1. h est endomorphisme : Facile

   De plus on a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} h(E_{11}) & h(E_{21}) & h(E_{12}) & h(E_{22}) \end{array} \\ B = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(h) = & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 2 & & & \\ -3 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow E_{11} \\ \leftarrow E_{21} \\ \leftarrow E_{12} \\ \leftarrow E_{22} \end{array} \end{array}$$

2. On a $rg(h) = rg(A) = \textit{Avec Gauss} = 2$ et $\dim(ker(h)) = \dim(\mathscr{D}_{épart}) - rg(h) = 4 - 2 = 2$.
3. La famille (I_2, A) est libre car non $//$ et dans $\ker(h)$ car $AI - IA = 0$ et $AA - AA = 0$

   de plus $cardinal = 2 = \dim(\ker h)$ Donc c'est une base de $com(A) = \ker(h)$.

   On a $A^2 \in \ker(h)$ car $A^2\,A = A\,A^2$ et (I, A) est une base de $\ker(h)$

   Donc A^2 est une CL, CàD il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $A^2 = \alpha\, I + \beta\, A$

Kulture pas inutile. $M \in \ker h \iff AM - M = 0 \iff AM = MA$

Conclusion : $M \in \ker f \iff$ la matrice M commute avec A.

D'où le vocabulaire $\ker f$, c'est le commutant de A.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. **Base/CL.**

   (a) La dérivation est linéaire donc D est linéaire.

   À valeurs dans E ?

   Soit $f \in F$, on peut écrire $f(x) = ax\cos(x) + b\cos(x) + cx\sin(x) + d\sin(x)$.

   $$\text{On a maintenant } f'(x) = ... = CL(....) \in F$$

   Donc D une endomorphisme de F.

   (b) Comme $E = Vect(...)$, la famille $\mathscr{B}$ est génératrice.

   Libre ? Avec la définition

   On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ ax\cos(x) + b\cos(x) + cx\sin(x) + d\sin(x)$.

   $$\boxed{\text{On va montrer que : } a = b = c = d = 0.}$$

   J'applique en $x = 0, \pi, -\pi, {}^{+\pi}/_2, {}^{-\pi}/_2$

   Ainsi $\mathscr{B}$ est une base et $\dim(E) = cardianl(Base) = 4$.

   (c) On fait un R.A. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ ax\cos(x) + b\cos(x) + cx\sin(x) + d\sin(x) = K$ avec $K \neq 0$

   $$\boxed{\text{On va chercher oups, en fait on va montrer que } K = 0 \text{ donc oups}}$$

   $>$ Méthode lourde mais qui marche. J'applique en $x = 0, \pi, -\pi, {}^{+\pi}/_2, {}^{-\pi}/_2$.

   $>$ Méthode moins lourde. Je dérive l'égalité car ainsi K disparait.

   On obtient une CL et comme la famille $\mathscr{B}$ est libre, j'ai un systèmes simple.

   On en déduit que $a = b = c = d = 0$. Ainsi $K = 0$ Oups.

2. **Sans les matrices**

   (a) On $h \in \ker(D) \iff h \in E$ et $D(h) = h' = 0 \iff h \in E$ et $K = constante$

   Donc D'après Q1c., on sait que $h = 0$. L'endomorphisme h est injectif.

   La fonction h est injectif et c'est un endomorphisme de E et $\dim(E) = 4 < \infty$

   Donc h est un automorphisme.

   (b) On sait que :

   $$y'' + y = 0 \iff \textit{il existe } a, b \textit{ tel que : } \forall x,\ y(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

   On va maintenant déterminer une base de $\ker(D^2 + id)$

   $$\begin{aligned} \textit{On a } h \in \ker(D^2 + id) &\iff h \in E \text{ et } [D^2 + id](h) = 0 \\ &\iff h \in E \text{ et } y'' + y = 0 \\ &\iff \textit{il existe } a, b \textit{ tel que : } \forall x,\ y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) \\ &\iff h \in Vect(\cos, \sin). \end{aligned}$$

   La famille $(\cos, \sin)$ est génératrice de $\ker(D^2 + id)$ et libre (car non //)

   Donc c'est une base.

3. **Avec les matrices**

   (a) On a

$$A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D(\sin(x)) & D(x\sin(x)) & D(\cos(x)) & D(x\cos(x)) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \sin(x) \\ \leftarrow x\,\sin(x) \\ \leftarrow \cos(x) \\ \leftarrow x\,\cos(x) \end{array}$$

   Comme $\det(A) = ... = 1$ que la matrice A est inversible et D est un automorphisme de E.

   (b) On a $B = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D^2 + id) = A^2 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \sin(x) \\ \leftarrow x\,\sin(x) \\ \leftarrow \cos(x) \\ \leftarrow x\,\cos(x) \end{array}$.

   On va maintenant déterminer une base de $\ker(D^2 + id)$

$$\begin{aligned}
\textit{On a } h \in \ker(D^2 + id) &\iff h \in E \text{ et } [D^2 + id](h) = 0 \\
&\qquad\qquad \textit{Or } \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D^2 + id) = A \\
&\iff B\overrightarrow{U} = \overrightarrow{0} \qquad \text{avec } \overrightarrow{U} = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(h) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \sin(x) \\ \leftarrow x\,\sin(x) \\ \leftarrow \cos(x) \\ \leftarrow x\,\cos(x) \end{array} \\
&\iff \begin{cases} b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\
&\iff \overrightarrow{U} = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(h) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \sin(x) \\ \leftarrow x\,\sin(x) \\ \leftarrow \cos(x) \\ \leftarrow x\,\cos(x) \end{array} \\
&\iff h = a\sin + c\cos \\
&\iff h \in Vect(\cos, \sin).
\end{aligned}$$

   La famille $(\cos, \sin)$ est génératrice de $\ker(D^2 + id)$ et libre (car non //)

   Donc c'est une base.

   (c) On trouve $B^2 = 0$

   Ainsi $B^2 = (A^2 + I)^2 = 0 \iff A^4 + 2\,A^2 + I = 0 \iff A\,(-A^3 - 2\,A) = I$.

   Donc A est inversible et $A^{-1} = -A^3 - 2\,A$.

   Comme $\mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D^{-1}) = A^{-1}$, on a $D^{-1} = -D^3 - 2\,D$.

4. **Changement de base.** On considère la famille $\mathscr{C} = \left(e^{ix} , x\, e^{ix} , e^{-ix} , x\, e^{-ix} \right)$

(a) On a

$$P = \mathcal{M}at(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} e^{ix} & xe^{ix} & e^{-ix} & xe^{-ix} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \sin(x) \\ \leftarrow x \sin(x) \\ \leftarrow \cos(x) \\ \leftarrow x \cos(x) \end{array} \end{array}$$

Comme $\det(P) = -4 \neq 0$, la famille $\mathscr{C}$ est une base E.

(b) On a

$$A' = \mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(D) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} D(e^{ix}) & D(xe^{ix}) & D(e^{-ix}) & D(xe^{-ix}) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cc:cc} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow e^{ix} \\ \leftarrow x\, e^{ix} \\ \leftarrow e^{-ix} \\ \leftarrow x\, e^{ix} \end{array} \end{array}$$

Les formules de changement de base assure que : $A = PA'P^{-1}$

(c) Comme A' est diagonale par bloc

et sachant que lorsque N est nilpotente d'ordre 2, $(aI + N)^2 = a^n\, I + na^{n-1}\, N$

On a donc $$(A')^n = \left(\begin{array}{cc|cc} (i)^n & n(i)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (i)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-i)^n & n(-i)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & (-i)^n \end{array}\right)$$

On a $A^n = \left(PA'P^{-1}\right)^n = P\ (A')^n\ P^{-1}$