Non SI

Exercice 1. [Correction] Soit J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ la base canonique $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par : $\forall \overrightarrow{U} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),$ *tel que* $f(\overrightarrow{U}) = J\overrightarrow{U}$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{t} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on note $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{t}$.

Partie I

Soit $\overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et Q l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à $\overrightarrow{a}$.

1. Montrer que Q est un plan vectoriel (CàD ssev et dim=2) et que Q est stable par f.
2. On pose $\overrightarrow{b} = \left(1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$.
   (a) Vérifier que $\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est une base de Q.
   (b) Décomposer $f\left(\overrightarrow{b}\right)$ et $f\left(\overrightarrow{c}\right)$ sur le vecteurs $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.
   Trouver un réel θ tel que : $f\left(\overrightarrow{b}\right) = \cos\theta\,\overrightarrow{b} + \sin\theta\,\overrightarrow{c}$ et $f\left(\overrightarrow{c}\right) = -\sin\theta\,\overrightarrow{b} + \cos\theta\,\overrightarrow{c}$
   (c) Interpréter géométriquement la restriction de f au plan Q.

Partie II

On définit ainsi les matrices colonnes à coefficients complexes $\overrightarrow{X_1} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{B} + i\,\overrightarrow{C}$ et $\overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{B} - i\,\overrightarrow{C}$

De plus on désigne par $P = \left(\overrightarrow{X_1} \,|\, \overrightarrow{X_2} \,|\, \overrightarrow{X_3}\right)$ la matrice carré d'ordre 3, qui regroupe les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3}$

1. Calculer P en fonction de j et j^2. Rappel : j est le célèbre complexe..
2. Soit $\overline{P}$ la matrice dont les coefficient sont les conjugués de ceux de P.
   Calculer $P\overline{P}$ en fonction de la matrice I. Que peut-on déduire de ce calcul ?
3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer $J\overrightarrow{X_i}$ en fonction de $\overrightarrow{X_i}$.

Spécial Trégoat et consort. L'inégalité de Bernstein.

Exercice 2. [Correction]

Voici un "jolie" problème qui visite bien les notions du programme de sup.

Les questions ne sont pas indépendantes mais à la fin de chaque question, je vous donne les résultats nécessaires pour poursuivre.

1. Décomposition en éléments simples.

   On suppose que $p \in \{0, 1, ..., n\}$ et on considère la fraction $F = F(X) = \dfrac{X^p}{1 + X^n}$

   (a) Justifier que la fraction est irréductible.
   On note $z_1, ...z_n$ les racines du polynôme $X^n + 1$.
   Sans chercher à expliciter $z_1, ...z_n$ et en s'inspirant du programme de colle justifier qu'elles sont 2 à 2 distinctes.

   (b) On suppose que $p \in \{0, 1, ..., n-1\}$.
   $>$ Sans chercher à expliciter $z_1, ...z_n$, décomposer la fraction F en éléments simples dans $\mathbb{C}$.
   $>$ En déduire que : $F'(X) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(z_k)^{p+1}}{(X - z_k)^2}$

   (c) Reprendre le calcul quand $p = n$ et justifier que la formule est encore valide quand $p = n$.

   (d) En déduire que $\forall\, p \in \{0, 1, ..., n\}$, $p = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(z_k)^{p+1}}{(1 - z_k)^2}$

   On notera que lorsque $p = 0$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{z_k}{(1 - z_k)^2} = \dfrac{-n^2}{4}$

2. On va démontrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $XP'(X) = \dfrac{n}{2} P(X) + \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{z_k}{(1 - z_k)^2} P(z_k X)$

   (a) Justifier que l'égalité est valide pour les polynômes $1, X, X^2, ..., X^n$.

   (b) En déduire que l'égalité est valide pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

3. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, CàD $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1\}$

   $$\textit{Rappel} \ : \ z \in \mathbb{U} \iff |z| = 1 \iff \text{il existe } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } z = e^{i\theta}$$

   (a) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $\dfrac{u}{(1 - u)^2}$ est un réel négatif

   (b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{|z_k|}{|1 - z_k|^2} = \dfrac{n^2}{4}$

4. On considère un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$. donc P est de degré $\leqslant n$ et ses coefficients sont dans $\mathbb{C}$.

   $$\text{On note } \ \|P\| = \sup\left(\left|P\left(e^{i\theta}\right)\right| \text{ avec } \theta \text{ varie dans } [0, 2\pi] \right)$$
   $$= \sup\left(|P(u)| \text{ avec } u \text{ varie dans } \mathbb{U} \right)$$

   Il est facile de démontrer que la fonction $\phi : \theta \longmapsto \phi(\theta) = \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$,
   donc elle est bornée
   Conclusion : On a que $\|P\| \underset{Stric}{<} \infty$

   (a) Se rappeler les principales propriétés de $\sup(A)$ et des $\|f\|_\infty$

   (b) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{U}$, $|P'(u)| \leqslant n \|P\|$

   (c) En déduire que $\|P'\| \leqslant n \|P\|$ (c'est l'inégalité de Bernstein 1906)

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

Partie I

Soit $\overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et Q l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à $\overrightarrow{a}$.

1. Q est un plan vectoriel ?

   On a $\overrightarrow{u} \in Q \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0 \iff \overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Donc $Q = vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ainsi Q est un plan vectoriel

   Q est stable par f ?

   On suppose que $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in Q$

   $$\boxed{\text{On doit montrer que } f(\overrightarrow{u}) = J\overrightarrow{U} \in Q}$$

   À faire.

2. On pose $\overrightarrow{b} = \left(1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$.

   (a) On trouve que $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = (0, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

   $\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est une base de Q ?

   la famille est libre (car $\neq 0$ et non//), dans Q, cardinal=2 et $\dim(Q) = 2$

   Donc c'est une base de Q

   (b) Décomposer $f\left(\overrightarrow{b}\right)$ et $f\left(\overrightarrow{c}\right)$ sur le vecteurs $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

   On a

   $$f\left(\overrightarrow{b}\right) = J\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

   $$\text{et} \quad f\left(\overrightarrow{c}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

   Donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$ convient car $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   (c) Interpréter géométriquement la restriction de f au plan Q.

   On fait un dessin et on constate que f est la rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Partie II

1. Calculer P en fonction de j et j^2.

   On a $\overrightarrow{X_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{B} + i\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{B} - i\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$

   $$\text{Ainsi } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$$

2. Calculer $P\overline{P}$ en fonction de la matrice I. Que peut-on déduire de ce calcul ?

   On trouve $P\overline{P} = 3\,I_3$ Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}\overline{P}$

3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer $J\overrightarrow{X_i}$ en fonction de $\overrightarrow{X_i}$.

   On a $J\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X_1}$ et

   $$J\overrightarrow{X_2} = \begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix} = j^2\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} = j^2\overrightarrow{X_2}$$

   et de même $J\overrightarrow{X_3} = j\overrightarrow{X_3}$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Décomposition en éléments simples.

(a) Autour des racines

> Comme 0 est la seule racine de X^p et que 0 n'est pas racine de X^n+1,
Donc la faction est irréductible.

> On a les racines du polynôme $B(X) = X^n+1$ sont 2 à 2 distinctes
Ssi $B(X) = X^n+1$ et $B'(X) = nX^{n-1}$ n'ont pas de racines communes.
Ssi le système $\begin{cases} X^n+1=0 \\ n\,X^{n-1} \quad =0 \end{cases}$ n'a pas de solution.

$$\text{On a } \begin{cases} X^n+1=0 \\ n\,X^{n-1} \quad =0 \end{cases} \iff \begin{cases} X^n+1=0 \\ n\,X \quad =0 \end{cases} \implies 1=0 \text{ Oups !}$$

Conclusion les racines de B sont simples.

(b) On suppose que $p \in \{0,1,...,n-1\}$.
Comme la fraction $F(X) = \dfrac{X^p}{1+X^n}$ est irréductible et que $B(X) = X^n+1 = 1(X-z_1)..(X-z_n)$ n'a que des racines simples, Le théorème de décomposition en éléments simples assure que l'on peut écrire

$$F(X) = Q(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X-z_k}$$

→ A cause que degré, on a $Q(X) = 0$

→ Et on sait que pour les racines simples

$$a_k = \frac{A(z_k)}{B'(z_k)} = \frac{(z_k)^p}{n(z_k)^{n-1}}$$

Or z_k est une racine de B donc $(z_k)^n = -1$

$$= \frac{(z_k)^p\, z_k}{n(z_k)^n} = (-1)\frac{(z_k)^{p+1}}{n}$$

On a donc $F(X) = \dfrac{-1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(z_k)^{p+1}}{X-z_k}$

$$\text{On dérive l'égalité et on a } F'(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(z_k)^{p+1}}{(X-z_k)^2}$$

(c) Quand $p=n$, la démarche est la même, la seule différence, c'est que l'on trouve $Q(X)=1$

$$\text{Ainsi on trouve } F(X) = \frac{X^n}{1+X^n} = 1 + \frac{-1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(z_k)^{n+1}}{X-z_k}$$

Dans on dérive l'égalité, on obtient la même formule car $[1]' = 0$

(d) On suppose que $p \in \{0,1,...,n\}$

$$\text{On a } F'(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(z_k)^{p+1}}{(X-z_k)^2} \text{ et } F'(X) = \left[\frac{X^p}{1+X^n}\right]' = \frac{pX^{p-1}(1+X^n) - X^p nX^{n-1}}{(1+X^n)^2}$$

On a donc

$$F'(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(z_k)^{p+1}}{(1-z_k)^2} \; et \; F'(1) = \frac{2p-n}{2^2} = \frac{p}{2} - \frac{n}{4}$$

Comme $F(1) = F(1)$, on a $p = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(z_k)^{p+1}}{(1-z_k)^2}$.

2. Une égalité.

$$XP'(X)=\frac{n}{2}P(X)+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{(1-z_k)^2}P(z_kX)$$

(a) On fixe $k\in\{0,1,..,n\}$ et $P(X)=X^p$ avec $k\in\{0,1,..,n\}$,
on a $XP'(X)=pX^p$ et

$$\begin{aligned}\frac{n}{2}P(X)+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{(1-z_k)^2}P(z_kX)&=\frac{n}{2}X^p+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{(1-z_k)^2}(z_k)^pX^p\\&=\frac{n}{2}X^p+X^p\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(z_k)^{p+1}}{(1-z_k)^2}\\&\quad\text{On applique l'égalité précedente}\\&\quad\text{CàD }\ \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(z_k)^{p+1}}{(1-z_k)^2}=p-\frac{n}{2}\\&=\frac{n}{2}X^p+X^p\left(p-\frac{n}{2}\right)\\&=pX^p\end{aligned}$$

Donc c'est bien égale.

(b) Superposition

3. Autour des complexes

(a) On fixe $u\in\mathbb{U}\backslash\{1\}$. Comme $u\in\mathbb{U}$, il existe θ tel que $z=e^{i\theta}$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi }\ \frac{u}{(1-u)^2}&=\frac{e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2}\\&=\frac{e^{i\theta}}{[e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})]^2}\\&=\frac{e^{i\theta}}{\left[e^{i\theta/2}\left(-2i\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^2}\\&=\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}4.i^2.\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{-1}{4.\sin^2\frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{u}{(1-u)^2}$ est bien un réel négatif

(b) On vérifie facilement que les racines $z_1,...z_n$ de X^n+1 sont dans $\mathbb{U}\backslash\{1\}$

$$\begin{aligned}&\text{En effet }\ (z_k)^n=-1\\&\qquad\Longrightarrow |z_k|^n=1\text{ donc }|z_k|=1\text{ car un module est dans }[0,+\infty[\\&\qquad\text{Donc }\ z_k\in\mathbb{U}\\&\qquad\text{Et comme } 1\text{ n'est pas racine de }\ X^n+1\ \Longrightarrow\ z_k\neq 1\end{aligned}$$

Comme $z_k\in\mathbb{U}\backslash\{1\}\Rightarrow\dfrac{z_k}{(1-z_k)^2}$ est un réel négatif donc $\left|\dfrac{z_k}{(1-z_k)^2}\right|=-\dfrac{z_k}{(1-z_k)^2}$

$$\begin{aligned}\text{On a maintenant }\ \sum_{k=1}^{n}\frac{|z_k|}{|1-z_k|^2}=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k}{(1-z_k)^2}\right|&=\sum_{k=1}^{n}\frac{-z_k}{(1-z_k)^2}\\&\quad\text{On utilise }Q1.d.\\&=-\left(-\frac{n^2}{4}\right)\end{aligned}$$

4. Majoration finale

(a) Le $||P|| = \sup(|P(u)|,$ avec $u \in \mathbb{U})$ est Le majorant optimal, CàD

> $>$ Majorant. $||P||$ est un majorant de $|P(u)|$ lorsque $u \in \mathbb{U}$.
>
> $>$ Optimal version 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, $||P|| - \varepsilon \underset{Strict}{<} ||P||$
>
> donc $||P|| - \varepsilon$ ne majore pas, CàD il existe $u_0 \in \mathbb{U}$ tel que $||P|| - \varepsilon \underset{Strict}{<} |P(u_0)|$
>
> $>$ Optimal version 2. Si M est un autre majorant alors $||P|| \leqslant M$

(b) On fixe $u \in \mathbb{U}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|P'(u)\right| &= \left|uP'(u)\right| \quad \text{car } |u| = 1 \\
&= \left|\frac{n}{2}P(u) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{(1-z_k)^2}P(z_k u)\right| \\
&\quad \text{On fait l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \frac{n}{2}|P(u)| + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k}{(1-z_k)^2}\right| |P(z_k u)| \\
&\quad \text{Comme } u \text{ et } z_k u \in \mathbb{U}, \text{ alors } |P(u)| \text{ et } |P(z_k u)| \text{ sont} \leqslant \|P\| \\
&\quad\quad \text{C'est une propriété de } \|P\| \\
&\leqslant \frac{n}{2}\|P\| + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k}{(1-z_k)^2}\right| \|P\| \\
&\quad \text{On factorise } \|P\| \text{ et on utilise } \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k}{(1-z_k)^2}\right| = \frac{n^2}{4} \\
&\leqslant \left(\frac{n}{2} + \frac{2}{n}\frac{n^2}{4}\right)\|P\| = n\|P\|
\end{aligned}$$

(c) Comme $n\|P\|$ est un majorant de $\left|P'(u)\right|$ sur $\mathbb{U}$ et que $\left\|P'\right\|$ est le majorant optimal de $\left|P'(u)\right|$ sur $\mathbb{U}$,

Donc on a bien $\left\|P'\right\| \leqslant n\|P\|$