Programme de colle de la semaine 25

du Lundi 05 Mai au Vendredi 09 Mai.

Questions de cours.

> Hyperplan et forme linéaire

Définition de Hyperplan et de forme linéaire.

Montrer que le noyau d'une forme linéaire non-nulle est un hyperplan

> Polynôme premier entre eux

Démontrer que si P et Q n'ont aucune racine complexe commune, alors P et Q sont premiers entre eux.

> Application du théorème de Gauss

On suppose que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

En utilisant le théorème de Gauss, démontrer que si P et Q divisent un troisième polynôme R ,
alors il en est de même pour le polynôme PQ.

> Racine multiple

Définition de la multiplicité d'une racine.

On suppose que r est racine de multiplicité k du polynôme A.
Montrer que r est racine de multiplicité $k-1$ dans A'.

Montrer que : les polynômes A et A' sont premier entre eux Ssi le polynôme A n'a pas de racine multiple.

> Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Factoriser X^4+1 dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Application : `On note` $div_{u,\mathbb{K}}(A)$ `la liste des diviseurs unitaires de` A `dans` $\mathbb{K}[X]$.
Déterminer $div_{u,\mathbb{C}}(X^4+1)$, $div_{u,\mathbb{R}}(X^4+1)$ et $div_{u,\mathbb{Q}}(X^4+1)$

Questions/compléments de cours plus difficile. À réserver à : Amorim, Baptiste, Baracan, Bonfils ?, Brimont, Carrel, Chassaing, Garcia, Kerlerou, Nivet, Plante, Provenchère, Tregoat, Tripier.

> Hyperplan et forme linéaire

Montrer que le noyau d'une forme linéaire non-nulle est un hyperplan.

Réciproquement : Soit H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ tel que $H=\ker(\varphi)$

> Polynôme irréductible.

Définition de : Un polynôme est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$

Déterminer $div_{u,\mathbb{C}}(X^2+1)$ et $div_{u,\mathbb{R}}(X^2+1)$. Le polynôme X^2+1 est-il irréductible ?

En utilisant les calculs d'une question de cours précédente, discuter si Le polynôme X^4+1 est-il irréductible ?

Montrer (à l'aide d'un RA) que le polynôme $P=X^3+X+1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. `(voir ci dessous)`

> Polynôme scindé.

Trouver la définition de "Polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$"

Avec Rolle, montrer que :
Si $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Avec Rolle et le suivi des multiplicités (les racines sont donc potentiellement multiples),
montrer que : Si $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé dans $\mathbb{R}$, alors P' est scindé dans $\mathbb{R}$. `(voir ci dessous)`

(Plus difficile) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$
Montrer que le polynôme $P'+aP$ est scindé sur $\mathbb{R}$. `(voir ci dessous)`

> Récurrence sur la taille des matrices **Spécialement pour : Baptiste, Baracan, Carrel, Chassaing, Nivet**

Soit A une matrice nilpotente. Montrer (avec les outils de sup) que $tr(A)=0$. `(voir ci dessous)`

Exercices

Du dénombrement. Je commence le dénombrement lundi

Quelques réponses

Montrer (à l'aide d'un RA) que le polynôme $P = X^3 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

On fait un RA. On suppose : le polynôme $P = X^3 + X + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

> Comme P n'est pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$,

il est possible de le factoriser comme produit de deux polynômes *non constants* à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

L'un d'eux est de degré 1, CàD dire de la forme $aX + b = a(X - {}^{b}/_{a})$, ainsi le polynôme P admet une racine $r = {}^{b}/_{a} \in \mathbb{Q}$

On écrit $r \in \mathbb{Q}$ sous forme d'une fraction *irréductible* $r = {}^{p}/_{q}$ `ainsi` p, q `sont premier entre eux`

> l'égalité $P(r) = 0$ devient, après réduction au même dénominateur, $p^3 + p q^2 + q^3 = 0$

- Or p divise $p^3 + p q^2$ donc p divise $-q^3$

Or p et q sont premiers entre donc (théorème de Gauss) p divise -1 donc $p = \pm 1$

- De même q divise $q^3 + p q^2$ donc q divise $-p^3$

Or p et q sont premiers entre donc (théorème de Gauss) q divise -1 donc $q = \pm 1$

> Conclusion $r = {}^{p}/_{q}$ est égale à 1 ou -1

Or $P(1) = 3 \neq 0$ et $P(-1) = -1 \neq 0$ Oups

Avec Rolle et le suivi des multiplicités (les racines sont donc potentiellement multiples),
montrer que : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Soit P un polynôme de degré n scindé sur $\mathbb{R}$

ainsi on peut écrire : $P = \prod_{k=1}^{p} (X - r_k)^{\alpha_k}$ avec $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n$

> D'une part le théorème de suivi des multiplicité assure r_k est une racine de P' de multiplicité $\alpha_k - 1$

Ainsi on a trouvé $\sum_{k=1}^{p} (\alpha_k - 1) = n - p$ racines pour P'.

> De plus avec Rolle itéré on fabrique des racines $\beta_1, ...$ tel que $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \beta_{p-1} < \alpha_p$

Ainsi on a trouvé $(p - 1)$ racines en plus pour P'

Conclusion : On a trouvé $n - p + (p - 1) = n - 1$ racines pour P' et $deg(P') = n - 1$
donc on les a toutes et elles sont toutes dans $\mathbb{R}$, CàD P' est scindé sur $\mathbb{R}$..

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $P' + aP$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

On considère $f : x \longmapsto f(x) = P(x)e^{ax}$ et on remarque que $f'(x) = \left[P(x)e^{ax}\right]' = \left(P'(x) + aP(x)\right)e^{ax}$.

De plus Comme l'exponentielle ne s'annule pas,

on a $f(X) = 0 \iff P(X) = 0$ et $f'(X) = 0 \iff P'(X) + aP(X) = 0$.

Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$, il admet exactement n racine distincte ou confondu dans R, *avec* $\deg(P) = n$

ainsi f n'annule n fois (avec multiplicité) dans R

On applique Rolle ainsi f n'annule $n - 1$ fois (avec multiplicité) dans R.

Ainsi $P'(X) + aP(X) = 0$ admet $n - 1$ racines dans R.

On justifie que la dernière racine (car $\deg(P' - aP) = n$) est dans $\mathbb{R}$ avec le lien coef racine

Remarque : Rigoureusement, il faudrait définir la multiplicité d'une racine dans une fonction et énoncer/démontrer le théorème de suivi des multiplicité.

Soit A une matrice nilpotente. Montrer (avec les outils de sup) que $tr(A) = 0$.

On va montrer par récurrence

$$H_{<n>} : \text{Si } A \text{ une matrice nilpotente de taille } n \times n \text{ alors } tr(A) = 0.$$

Initialisation avec $n = 1$

On suppose A une matrice nilpotente (d'ordre p) de taille 1×1

Ainsi $A = (\alpha)$ et $A^p = (\alpha^p) = \mathscr{O}$ donc $\alpha^p = 0$ donc $\alpha = 0$

Conclusion : $A = \mathscr{O}$ et $tr(A) = tr(\mathscr{O}) = 0$. Ainsi $H_{<1>}$ est vrai.

Hérédité On suppose que $H_{<n>}$ est vrai

On suppose A une matrice nilpotente (d'ordre p) de taille $(n+1) \times (n+1)$

On note $h_A : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ l'endomorphisme canoniquement associée à A

Étape 1.

Comme $A^p = \mathscr{O}$, on a $\det(A^p) = 0$ et de plus $\det(A^p) = \big(\det(A)\big)^p$

donc A n'est pas inversible et h_A n'est pas bijective

De plus pour les endomorphismes en dimension finie,

on "sait" que : h_A est bijective Ssi h_A est injective Ssi h_A est surjective

donc h_A n'est pas injective

Ainsi il existe $\overrightarrow{e} \neq \overrightarrow{O}$ tel que $h_A(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O}$

Étape 2.

La vecteur $\overrightarrow{e}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ est $\neq \overrightarrow{O}$ donc c'est une famille libre

Je la complète en une base de $\mathbb{R}^{n+1}$. Je note $\mathscr{C}$ cette base

On a avec les décoration que : $B = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(h_A) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$ avec A' une matrice $n \times n$

Étape 3.

Comme $A^p = \mathscr{O}$, on a $h_A^p = \mathscr{O}$, ainsi $B^p = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)^p = \textit{matrice triangulaire} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & *' \cdots *' \\ \hline 0 & \\ \vdots & (A')^p \\ 0 & \end{array}\right) = \mathscr{O}$

Donc $(A')^p = \mathscr{O}$, CàD la matrice A' est une matrice nilpotente de taille $n \times n$

Donc d'après $H_{<n>}$ on sait que $tr(A') = 0$ et que $tr(B) = 0$.

Étape 4

Les relations de changement de base assurent que A et B sont semblables

Donc $tr(A) = tr(B) = 0$. Ainsi $H_{<n+1>}$ est vrai ouf