Nom Lundi 05 Mai.

On considère la fonction $D : x \longmapsto D(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1. Justifier le fait que D est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,
   et vérifier que D est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.
2. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt$.
3. Soit la fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{t^2}}{t^2}$.
   Montrer que h est croissante sur $[1, +\infty[$.
   En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$
   Enfin justifier que : $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$
4. Montrer que : $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$ puis déterminer un équivalent de $D(x)$ au voisinage de $+\infty$.
   Attention : $\displaystyle\int_1^x \cdots \neq \int_0^x \cdots$
5. On admet que $a = D(1) > 0$
   (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall\, x \geqslant A,\ D(x) \leqslant a$.
   (b) Démontrer que D admet et atteint son maximum en (au moins) un point b de $\mathbb{R}_+^\times$.
   (c) Montrer que ce maximum est égal à $\dfrac{1}{2b}$.
   (d) En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.

Nom : Baptiste, Baracan, Carrel, Chassaing, Nivet,. Lundi 05 Mai.

On considère la suite (S_n) définie par $\forall\, n \geqslant 2,\ S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}$

1. Justifier que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

   Attention : Pour justifier qu'un la série positive (S_n) diverge il y a 2 thm :

   Minoration, CàD $S_n \geqslant a_n$ et la série de ref (a_n) diverge

   OU Équivalent $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$ et la série de ref (a_n) diverge.

2. À l'aide d'une comparaison Série/Intégrale, montrer que : $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \int_2^n \frac{1}{\ln(t)}\,dt$
3. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
   (a) Montrer qu'il existe A tel que $\forall\, n \geqslant A,\ \int_A^n \frac{1}{\ln^2 t}\,dt \leqslant \varepsilon \int_A^n \frac{1}{\ln t}\,dt$

   (b) En déduire avec un final de Césaro que $\int_2^n \frac{1}{\ln^2 t}\,dt \underset{n\to\infty}{=} o\left(\int_2^n \frac{1}{\ln t}\,dt\right)$
4. À l'aide d'une IPP, montrer que : $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$
5. **Bonus** Déterminer un équivalent de $S_n - \frac{n}{\ln n}$, lorsque n tend vers ∞