Probabilité.

1 Expérience - Univers - Évènements 1

2 Probabilité. 3

2.1 Définition. 3

2.2 Probabilité uniforme. 4

2.3 Probabilité conditionnelle. 5

2.4 Indépendance 6

3 Les théorèmes classiques. 7

4 Exercices. 8

1 Expérience - Univers - Évènements

Définition 1. Expérience - Univers - Évènements

> Une expérience aléatoire est une expérience matérielle ou de pensée dont le résultat n'est pas constant ;
CàD que lorsqu'on répète l'expérience, on peut obtenir différents résultats.

> L'ensemble des résultats possibles (ou imaginable) d'une expérience est appelé l'univers ou l'univers des possibles. On le note souvent Ω.
Les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés les évènements élémentaires de l'univers Ω.

> Les partie $A \subset \Omega$ sont appelés les évènements de l'univers Ω.
Remarque : l'ensemble des évènements de l'univers Ω c'est l'ensemble des parties de Ω CàD c'est $\mathscr{P}(\Omega)$

Théorème 2.
On se donne une expérience.
Alors l'univers des possibles Ω n'est pas unique.

L'univers des possibles
dépend de la modélisation de l'expérience.

Voici une expérience avec 2 modélisations.

`L'expérience : Je lance 2 dés et je regarde les faces des dés.`

Modélisation "discernable".

Je décide de colorier les dés : un Rouge et un Bleu et de lire le résultat en commençant par le dé rouge.
Ainsi l'univers des possibles Ω_1, c'est l'ensemble des couples

$$\left(\begin{array}{c}\text{Résultat du}\\ \text{dé Rouge}\end{array}, \begin{array}{c}\text{Résultat du}\\ \text{dé Bleu}\end{array}\right)$$

Avec cette modélisation, on a

> $\Omega_1 = \left\{(1,1),(1,2),(2,1),......,(6,6)\right\}$
> et on a facilement $cardinal(\Omega_1) = 6 \times 6 = 36$

Modélisation "daltonien".

Je décide que les dés sont indiscernables et je lis le résultat par ordre croissant.
Ainsi l'univers des possibles Ω_2, c'est l'ensemble des couples

$$\left(\begin{array}{c}\text{le plus petit}\\ \text{des 2 dés}\end{array}, \begin{array}{c}\text{le plus grand}\\ \text{des 2 dés}\end{array}\right)$$

Avec cette modélisation, on a

> $\Omega_2 = \left\{(1,1),(1,2),\cancel{(2,1)},......,(6,6)\right\}$

> et on a $cardinal(\Omega_2) = distinct + Double = \binom{6}{2} + 6 = 21$

Définition 3. Vocabulaire classique sur les évènements

On considère une expérience avec une modélisation et on note Ω l'univers des possibles.
On considère A, B des évènements, donc A, B sont des parties de Ω.

> L'évènement $A \cup B$ signifie que «l'un au moins des deux événements A et B est réalisé»,
CàD c'est l'évènement A ou B.

> L'évènement $A \cap B$ signifie que «A et B sont réalisés simultanément»,
CàD c'est l'évènement A et B.

> L'évènement $\overline{A}$ est appelé l'évènement contraire de A.

> On dit que les évènements A et B sont **incompatibles** Ssi $A \cap B = \varnothing$.

Exemple 1

On lance un dé à 6 faces un fois et on regarde le résultat.
On a donc ici $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Je considère les évènements

$$\begin{aligned}
&\omega = \{3\} \text{ Donc } \omega \text{ c'est l'évènement élèmentaire : "Le résultat du lancé est égal à 3."}\\
&A = \{1,2,3\} \ \text{ Donc } A \text{ c'est l'évènement : "Le résultat du lancé est égal à 1,2 ou 3."}\\
&B = \{2,4,6\} \ \text{ Donc } B \text{ c'est l'évènement : "Le résultat du lancé est pair."}
\end{aligned}$$

On a clairement

$$\overline{A} = \{4,5,6\}, \quad A \cap B = \{2\} \text{ et comme } B \cap \{\omega\} = \{2,4,6\} \cap \{3\} = \varnothing \text{ alors } B \text{ et } \{\omega\} \text{ sont incompatibles.}$$

Exemple 2

Considérons une urne, qui contient a boules blanches et b boules noires.
On tire n boules de cette urne, avec remise entre les tirages.
Pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$, notons B_i (resp. N_i) l'événement «la i-ème boule tirée est blanche (resp. noire)».
Alors

> $\bigcap_{i=1}^{n} N_i$ c'est l'événement ....

> $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ est l'événement ....

> $\bigcup_{i=1}^{n-1} (B_i \cap B_{i+1})$ est l'événement ....

2 Probabilité.

2.1 Définition.

Définition 4. Définition d'une probabilité

On considère une expérience avec une modélisation et on note Ω l'univers des possibles.

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'univers Ω, c'est une fonction définie sur l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$

Ainsi Comme $A \subset \Omega$ est un évènement alors on peut calculer $\mathbb{P}(A)$

De plus la fonction $\mathbb{P}$ a les propriétés suivantes.

> $\mathbb{P}(A)$ est un nombre dans $[0,1]$.

> $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

> Lorsque les événements A et B sont incompatibles, CàD $A \cap B = \varnothing$

alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

$\boxed{\text{Le couple } (\Omega, \mathbb{P}) \text{ est appelé un espace probabilisé.}}$

Vocabulaire.

> Lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que l'évènement A est certain.

> Lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que l'évènement A est impossible.

Théorème 5. Formulaire

On a

> Lorsque $A \subset B$ alors $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B) \leqslant 1$.

> $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$

> $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

> $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$

Lorsque de plus les évènements $(A_1, ..., A_n)_{k \in I}$ sont 2 à 2 incompatibles (ou disjoint),

$$\text{alors } \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

2.2 Probabilité uniforme.

Théorème 6. Probabilité Uniforme

On considère une expérience avec une modélisation et on note Ω l'univers des possibles.
On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \dots\dots, \omega_N\}$ est de cardinal fini, CàD $card\,(\Omega) = N < +\infty$.

Alors il existe une (unique) probabilité $\mathbb{P}$ telle que
tous les évènements élémentaires ω_k sont équiprobable,
CàD ont la même probabilité égale à $^1/_N$,

$$\text{Alors on a : } \forall\, \omega \in \Omega, \text{ on a } \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{N} = \frac{1}{card\,(\Omega)}$$

On dit que $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.

De plus on a

$$Si\ A \subset \Omega \text{ alors } \mathbb{P}(A) = \frac{card\,(A)}{card\,(\Omega)} = \frac{\text{Favorable}}{\text{Possible}}$$

Démonstration : Démonstration du "de plus"

L'évènement A c'est l'ensemble donc c'est la réunion disjointe de ses éléments, ainsi $A = \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi}\quad \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{\omega_1, \dots, \omega_p\}) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{card(\Omega)} = p.\frac{1}{card(\Omega)} = card(A)\frac{1}{card(\Omega)}\end{aligned}$$

Fini □

Exemple 1.

On lance un dé à 6 faces un fois et on regarde le résultat.
On a donc ici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
On suppose que le dé est non pipé donc les probabilités de chaque face sont égales donc on choisit la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
Je considère

A c'est l'évènement : Le résultat du lancé est un diviseur de 6
B c'est l'évènement : Le résultat du lancé est pair

$$\text{On a } \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{1, 2, 3, 6\}) = \frac{card\,(A)}{card\,(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exemple 2.

On regarde le jour de naissance d'une personne.
On a donc ici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots., 364, 365\}$.
On suppose que tous les jours sont équiprobables (en réalité, c'est faux) donc on choisit la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
Je considère

A c'est l'évènement : être né au mois de Janvier
B c'est l'évènement : être né le 03 du mois
C c'est l'évènement : être né le même jour que moi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Fav}}{\text{Pos}} = \frac{31}{365} \approx 0.085,\ \ \mathbb{P}(B) = \frac{\text{Fav}}{\text{Pos}} = \frac{12}{365} \approx 0.033,\ \ \mathbb{P}(C) = \frac{\text{Fav}}{\text{Pos}} = \frac{1}{365} \approx 0.003$$

2.3 Probabilité conditionnelle.

Définition 7. Probabilité conditionnelle

On considère $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, CàD une expérience avec une modélisation ainsi on a Ω l'univers des possibles et on a choisi et fixé une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω
On suppose que $B \subset \Omega$ est un évènement avec $\mathbb{P}(B) > 0$

La probabilité conditionnelle de A sachant B, noté $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A\ sachant\ B)$, c'est

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) \overset{def}{=} \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

`Les probabilités conditionnelles` $\mathbb{P}_B(A)$ `et` $\mathbb{P}_A(B)$ `mesurent`
`les interférences, les interactions entre les évènements` A `et` B.

On peut remarquer que la fonction $A \longmapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur B.

Exemple 1

On lance un dé à 6 faces un fois et on regarde le résultat.
On a donc ici $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
On suppose que le dé est non pipé donc les probabilités de chaque face sont égales donc on choisit la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
Je considère

A c'est l'évènement : Le résultat du lancé est un diviseur de 6
B c'est l'évènement : Le résultat du lancé est un nombre premier

Calcul de $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ avec la définition.

$$\text{On a } \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{2/6}{4/6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Calcul de $\mathbb{P}_B(A)$ en situation.

Exemple 2

On regarde le jour de naissance d'une personne.
On a donc ici $\Omega = \{1,2,3,4,5,....,364,365\}$.
On suppose que tous les jours sont équiprobables (en réalité, c'est faux) donc on choisit la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
Je considère

A c'est l'évènement : être né dans un mois qui fini par "bre"
B c'est l'évènement : être né le 30 du mois

Calcul de $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ avec la définition.

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{4/365}{11/365} = \frac{4}{11} \quad ET \quad \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{4/365}{122/365} = \frac{4}{122} = \frac{2}{61}$$

Calcul de $\mathbb{P}_B(A)$ en situation.

2.4 Indépendance

Définition 8. Évènements indépendants

On considère $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, CàD une expérience avec une modélisation et une probabilité.
On suppose que $A, B, C \subset \Omega$ sont des évènements

> On dit que les évènements A et B sont indépendants Ssi on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) . \mathbb{P}(B)$$

> On dit que les évènements A, B, C sont indépendants Ssi on a

$$A, B, C \text{ sont 2 à 2 indépendants ET } \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) . \mathbb{P}(B) . \mathbb{P}(C)$$

Attention : A, B, C sont 2 à 2 indépendants $\not\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) . \mathbb{P}(B) . \mathbb{P}(C)$

Interprétation et explication du vocabulaire.

Les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ mesurent les interférences, les interactions entre les évènements A et B.
Quand $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A) \textit{ et de même } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$$

donc la probabilité de l'un n'est pas influencée par la réalisation (ou non) de l'autre

C'est pour cela que l'on parle d'évènement indépendant

3 Les théorèmes classiques.

Définition 9. Système complet d'évènements

On considère une expérience avec une modélisation et on note Ω l'univers des possibles.
On considère $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements.

On dit que $(A_1, A_2, ..., A_n)$ forment un système complet d'évènements

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ et les } \left(A_i\right) \text{ sont 2 à 2 incompatibles (CàD partition noté } \Omega = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i)$$

Exemple fondamental. Soit A un évènement

Alors la paire $\left\{A, \overline{A}\right\}$ est un système complet d'évènements

Théorème 10.

On considère $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, CàD une expérience avec une modélisation et une probabilité.

> **Formule des probabilités composées**

$$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_1 et A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1 et ... et A_{n-1}}(A_n)$$

> **Formule des probabilités totales avec un système complet**

Soit $(A_k)_{k\in\{1,...,n\}}$ un système complet d'évènement, on a alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\,.\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Exemple classique :

Comme le couple $(A, \overline{A})$ est système complet d'évènement, on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,.\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right).\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

> **Formule de Bayes**

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\,.\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Démonstration :

Démonstration de la formule des probabilités composées

De la formule des probabilités conditionnelles, on déduit que $\mathbb{P}(A\, et\, B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B)$

$$\begin{aligned} Ainsi\; \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) &= \mathbb{P}(\Box \cap A_2) \\ &= \mathbb{P}(\Box)\,\mathbb{P}_{\Box}(A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1})\,\mathbb{P}_{A_1 \cap ... \cap A_{n-1}}(A_n) \end{aligned}$$

De même $\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-2})\,\mathbb{P}_{A_1 \cap ... \cap A_{n-2}}(A_{n-1})$
On replace et on recommence.

Formule des probabilités totales avec un système complet

Comme $\Omega = \bigcup_{k=1}^{k=n} A_k$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega) &= \mathbb{P}\left[B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{k=n} A_k\right)\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{k=1}^{k=n} (B \cap A_k)\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(B) \end{aligned}$$

Démonstration de la formule de Bayes

De la formule des probabilités conditionnelles, on déduit que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B) \text{ et } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}_B(A)$$

4 Exercices.

Les évènements

Exercice 1. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé fini.

On note alors C l'événement « un et un seul des événements A ou B est réalisé ».

Trouver la relation ensemble entre A, B, C. En déduire que : $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$

Exercice 2. [Correction] On considère deux évènements A et B.

1. On suppose que $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
   (a) Montrer que : $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A) - [\mathbb{P}(A)]^2$
   (b) Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ x - x^2 \leqslant 1/4$.
   En déduire que : $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) \leqslant \dfrac{1}{4}$
   (c) Pourquoi en fait cette inégalité est-elle valide sans la condition $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
2. On suppose que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$
   (a) Calculer $\mathbb{P}_B(A) - \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
   (b) En déduire que : $\left|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$

Exercice 3. On suppose que les événements A et B sont indépendants

Montrer qu'alors les événements A et $\bar{B}$ sont indépendants (de même que $\bar{A}$ et B, ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$)

Proba uniforme, CàD $\dfrac{Favorable}{Totale}$

Exercice 4. On lance 6 fois un dé équilibré.

On modélise l'expérience en regardant la liste des résultats des lancées, CàD $\omega = (D_1, D_2, ..., D_6)$

Comme le dé est équilibré, c'est bien équiprobable

1. Décrire Ω et déterminer $card(\Omega)$
2. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu 6 fois le même nombre ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une fois chaque face ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu 2 deux et 4 quatre ?
5. Quelle est la probabilité que la plus grande valeur soit $\leqslant 4$? que la plus grande valeur soit égale à 4 ?

Exercice 5. On tire/distribue trois cartes dans un jeu de 32 cartes (8 hauteurs et 4 couleurs).

1. lorsque les cartes sont tirées simultanément
   les mains sont-elle équiprobables. Combien y-a-il de main différente, CàD déterminer $card(\Omega)$
   Calculer la probabilité d'obtenir 3 cartes de même couleur.
2. Lorsque les cartes sont tirées successivement,
   les mains sont-elle équiprobables. Combien y-a-il de main différente, CàD déterminer $card(\Omega)$
   Calculer la probabilité d'obtenir 3 cartes de même couleur.

Classique

Exercice 6.

1. **Optimisme préalable** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On joue n parties à un jeu avec une probabilité $1/100$ de gagner.
   Déterminer p_n la probabilité de gagner puis N tel que $P_N \geqslant 1/2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On joue n parties à un jeu avec une probabilité $1/n$ de gagner.
   Déterminer p_n la probabilité de gagner puis $\lim_{n\to\infty} p_n$.

Exercice 7. **Paradoxe des anniversaires.** En MPSI, il y a 30 élèves.

1. Calculer la probabilité que moins un autre MPSI soit né le même jour que vous.
2. Calculer la probabilité que moins 2 élèves de MPSI soient né le même jour.

Exercice 8. La feuille d'exercices du prof contient exactement 4 fautes, notée F_1, F_2, F_3, F_4.
Les 30 élèves font complètement et indépendamment la feuille d'exercices.
Chacun détecte une faute avec une probabilité $p = 1/20$.

1. Déterminer la probabilité que la faute F_1 soient détectées.
2. Déterminer la probabilité que toutes les fautes soient détectées.

Exercice 9. On possède 100 dès d'apparence identique.

> 75 sont normaux (les faces sont équiprobables).
> 25 sont pipés : le 6 a une chance sur deux d'apparaitre.

1. On prend un dès au hasard, et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6.
2. On obtient un 6 . Quelle est la probabilité que le dès soit pipé.
3. On relance et on obtient, à nouveaux un 6 . Quelle est la probabilité que le dès soit pipé.

Exercice 10. [Correction] On fixe un entier $n \geqslant 2$

On considère $n+1$ urne notée $U_0, U_1, ..., U_n$.
On suppose que l'urne U_k contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires.
On choisit une urne au hasard et dans cette urne, on tire 2 boules sans remise.
On considère les évènements

A_k : J'ai choisi l'urne U_k
B : J'ai tiré 2 boules blanches

1. Calculer $\mathbb{P}_{A_k}(B)$.
2. Vérifier que $\mathbb{P}(B) = 1/3$

Exercice 11. On considère une chaines de n individus numérotés de 1 à n. On va suivre la transmission d'une message le long de cette chaines.

> Si un individu dispose du message M. alors il peut soit transmettre correctement le message M, soit mentir et transmettre le message $\overline{M}$.
> Si un individu dispose du message $\overline{M}$ alors il peut soit transmettre correctement le message $\overline{M}$, soit mentir et transmettre le message $\overline{\overline{M}} = M$.

De plus les individus mentent avec une probabilité p.
On note T_k l'évènement " l'individu k a reçu le message M".

1. Calculer $\mathbb{P}(T_{k+1})$ en fonction $\mathbb{P}(T_k)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(T_k)$ (au départ l'individu 1 dispose du message M).
3. Calculer $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(T_k)$. *Une information relayée par un grand nombre de personne est-elle fiable '*

Plus difficile

Exercice 12. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Voici un jeu organisé en 2 étapes.

> Étape 1. On joue à pile ou face avec un pièce équilibré au plus n fois. Le jeu s'arrête dès que l'on obtient pile ou bien quand on atteint le maximum des n lancers réglementaires

> Étape 2. On dispose d'une urne avec une boule Blanche. On ajoute dans cette urne autant de boule noire que l'on a obtenu de face dans l'étape 1. On tire une boule.

1. On considère l'évènement B_n : "À l'étape 2, j'ai tiré l'unique boule Blanche"
   (a) On suppose que $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Calculer la probabilité $a_{k,n}$ d'obtenir k face puis une fois pile à la première étape.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(B_n)$.
2. Limite quand $n \to \infty$.
   (a) Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.2^k} = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt$
   (b) En déduire que : $\mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$ Rq $\ln 2 \approx 0.69$

Exercice 13. [Correction] On joue à un jeu avec une probabilité de gagner égale à 2/3.
On note p_k la probabilité de l'évènement

C_k : | j'ai gagné les k-ième et $(k+1)$-ième parties
Et c'était la première fois que je gagnai deux parties consécutives

1. Calculer p_2 et p_3.
2. On note G_1 l'événement : "J'ai gagné la première partie".
   Montrer que : $\mathbb{P}_{G_1}(C_{k+2}) = \frac{1}{3} p_k$ ET $\mathbb{P}_{\overline{G_1}}(C_{k+2}) = p_{k+1}$
3. En déduire p_{n+2} en fonction p_{n+1} et p_n.
4. Calculer p_n.

Exercice 14. [Correction] Deux joueurs s'affrontent lors d'une succession de parties de pile ou face.
Ils possèdent initialement un montant a et b respectivement, et à chaque victoire le perdant donne un euro au gagnant.
Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent.
On pose $N = a + b$.
Pour $a \in \{0, 1, ..., N\}$ on note p_a la probabilité que le joueur 1 rafle tout s'il commence avec a euros.

1. Montrer que si $0 < a < N$, $p_a = p\, p_{a+1} + q\, p_{a-1}$.
   En déduire l'expression de p_a.
2. Calculer de même q_b la probabilité que le joueur 2 gagne.
3. Y-a-t-il une chance pour que le jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice 15. On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet
> 3 descendants avec la probabilité $1/8$.
> 2 descendant avec la probabilité $3/8$.
> 1 descendant avec la probabilité $3/8$.
> aucun descendant avec la probabilité $1/8$.

A l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = 1/8$.

1. Déterminer la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération.
2. On note, pour tout n∈ℕ, x_n la probabilité pour qu'il n'y ait aucun individu à la n-ième génération.

$$\text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n^3 + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{3}{8}x_n + \frac{1}{8}$$

3. Montrer que la suite (x_n) est croissante puis qu'elle converge vers $\sqrt{5} - 2 \approx 0.24$.

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On suppose que $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
   (a) Comme $A \cap B \subset A$, on a $(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$, ainsi
   $$\underbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}_{\leqslant \mathbb{P}(A)} - \mathbb{P}(A).\underbrace{\mathbb{P}(B)}_{\geqslant \mathbb{P}(A)} \leqslant \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(A)$$
   (b) Pour tout $x \in [0,1]$, $\frac{1}{4} - \left(x - x^2\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$.
   Ainsi on a $\underbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}_{\leqslant \mathbb{P}(A)} - \mathbb{P}(A).\underbrace{\mathbb{P}(B)}_{\geqslant \mathbb{P}(A)} \leqslant \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(A) \leqslant {}^1/_4$
   (c) Lorsque $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A)$.
   On reprend le même raisonnement mais en échangeant les rôles de A et B
2. On suppose que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$
   (a) On a
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}_B(A) - \mathbb{P}_{\overline{B}}(A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} - \frac{\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right)}{\mathbb{P}(\overline{B})} \\
   &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} - \frac{\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right)}{1 - \mathbb{P}(B)} \\
   &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right) - \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right)} \\
   &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B)\left(\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right)\right)}{\mathbb{P}(B)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right)} \\
   &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B)\left(\mathbb{P}(A)\right)}{\mathbb{P}(B)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right)}
   \end{aligned}$$
   (b) Ainsi on a
   $$\begin{aligned}
   \left|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)\right| &= \left|\mathbb{P}(B)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right)\right| \left|\mathbb{P}_B(A) - \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\right| \\
   &\leqslant \frac{1}{4}\left|\mathbb{P}_B(A) - \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\right| \quad \textit{car pour tout } x \in [0,1],\ 0 \leqslant x(1-x) = x - x^2 \leqslant {}^1/_4 \\
   &\leqslant \frac{1}{4} \quad \textit{par } \mathbb{P}_B(A) \textit{ et } \mathbb{P}_{\overline{B}}(A) \textit{ sont dans } [0,1] \textit{ donc leur distance est } \leqslant 1
   \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé) On fixe un entier $n \geqslant 2$

On considère $n+1$ urne notée $U_0, U_1, ..., U_n$.
On suppose que l'urne U_k contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires.
On choisit une urne au hasard et dans cette urne, on tire 2 boules sans remise.
On considère les évènements

A_k : J'ai choisi l'urne U_k
B : J'ai tiré 2 boules blanches
B_1 : J'ai tiré une boule blanche au tirage 1
B_2 : J'ai tiré une boule blanche au tirage 12

1. Soit $k \in \{1, 2, .., n\}$. On a
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}_{A_k}(B) = \mathbb{P}_{A_k}(B_1 \cap B_2) &= \mathbb{P}_{A_k}(B_1)\mathbb{P}_{A_k \cap B_1}(B_2) \\
   &= \frac{k}{n} \quad \frac{k-1}{n-1}
   \end{aligned}$$

2. On a avec la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $(A_0, \ldots, A_n)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(B) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}\,\frac{k(k-1)}{n(n-1)} + \underbrace{0}_{k=0} \\
&= \frac{1}{(n+1)n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&\underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{n^3[1+o(1)]}\left(\frac{2\,n^3[1+o(1)]}{6}\right) \\
&\underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{3}[1+o(1)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 12 (Énoncé)

1. On considère l'évènement B_n : "À l'étape 2, j'ai tiré l'unique boule Blanche"
   (a) Je note C_i l'événement : J'ai fait face au i-ième lancé. On a

$$\begin{aligned}\forall k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}, \quad a_{k,n} &= \mathbb{P}\left(C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_k \cap \overline{C_{k+1}}\right)\\ &\quad \text{Les lancers sont indépendants}\\ &= \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2)\cdots\mathbb{P}\left(A_k\right)\mathbb{P}(\overline{C_{k+1}})\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

   De plus $a_{n,n} = \mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n) = {}^1/_{2^n}$.
   (b) On note $\mathscr{A}_k$ l'événement : "J'ai k fois face puis pile", ainsi $\mathbb{P}(\mathscr{A}_k) = a_{k,n}$
   Il est clair que $\mathbb{P}_{\mathscr{A}_k}(B_n) = \dfrac{1}{k+1}$
   car lorsque l'événement $\mathscr{A}_k$ est réalisé, l'urne contient 1 boule blanche et k boules noires.
   On applique la formule des probabilité totale avec le système complet $(\mathscr{A}_0, \dots, \mathscr{A}_n)$, ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathscr{A}_k)\mathbb{P}_{\mathscr{A}_k}(B_n)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\frac{1}{k+1} + \underbrace{\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{n+1}}_{k=n}\\ &= \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{p}\frac{1}{p} + \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

2. Limite quand $n \to \infty$.
   (a) On fait par récurrence $H_{<n>}$: $\left|\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k.2^k} = \ln(2) - \int_0^{1/2}\dfrac{t^n}{1-t}dt\right.$
   Initialisation n=1
   On a

$$\int_0^{1/2}\frac{t}{1-t}dt = \begin{cases}\text{On décompose en éléménets simples,....}\\ \text{OU bien}\\ \text{Astuce } \frac{t}{1-t} = \frac{t-1+1}{1-t} = -1 + \frac{1}{1-t}\end{cases}$$

   Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

$$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}, \text{ CàD } \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k.2^k} = \ln(2) - \int_0^{1/2}\frac{t^{n+1}}{1-t}dt}$$

   Méthode classique :
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k.2^k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k.2^k} + \frac{1}{(n+1).2^{n+1}}$ On applique $H_{<n>}$ puis final-Intermédiaire.

   Méthode Astucieuse.

$$\int_0^{1/2}\frac{t^{n+1}}{1-t}dt = \int_0^{1/2}\frac{t^n \times t}{1-t}dt = \int_0^{1/2}\frac{t^n(t-1+1)}{1-t}dt = \int_0^{1/2} t^n\,dt + \int_0^{1/2}\frac{t^n}{1-t}dt$$

   (b) On a

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{P}(B_n) - ln(2)\right| &= \left|-\int_0^{1/2}\frac{t^n}{1-t}dt + \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{n+1}\right|\\ &\leqslant \int_0^{1/2}\left|\frac{t^n}{1-t}\right|dt + \left|\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{n+1}\right|\\ &\leqslant \int_0^{1/2}\frac{t^n}{1-t}dt + \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{n+1}\\ &\leqslant \int_0^{1/2}\frac{t^n}{1-{}^1/_2}dt + \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{n+1}\\ &\leqslant 2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^{1/2} + \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{n+1} = \underbrace{2\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} + \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 13 (Énoncé) On note G_i l'événement : "J'ai gagné la i-ième partie".

1. On a :

$$p_2 = \mathbb{P}\left[\overline{G_1} \cap G_2 \cap G_3\right] = \mathbb{P}\left[\overline{G_1}\right] \mathbb{P}[G_2]\, \mathbb{P}[G_3] = \cdots \qquad \text{car les événements sont indépendants}$$

$$\begin{aligned} p_3 &= \mathbb{P}\left[\left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap G_3 \cap G_4\right) \sqcup \left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap G_3 \cap G_4\right)\right] \\ & \qquad \text{Les événements sont incompatibles} \\ &= \mathbb{P}\left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap G_3 \cap G_4\right) + \mathbb{P}\left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap G_3 \cap G_4\right) \end{aligned}$$

.

2. On a : $C_{k+2} = \left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap C_k\right) \sqcup \left(\overline{G_1} \cap C_{k+1}\right)$, ainsi

$$\mathbb{P}_{G_1}\left(C_{k+2}\right) = \mathbb{P}_{G_1}\left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap C_k\right) = \mathbb{P}\left(\overline{G_2} \cap C_k\right) = \mathbb{P}\left(\overline{G_2}\right).\mathbb{P}\left(C_k\right) = \frac{1}{3} p_k$$

$$\mathbb{P}_{\overline{G_1}}\left(C_{k+2}\right) = \mathbb{P}_{\overline{G_1}}\left(\overline{G_1} \cap C_{k+1}\right) = \mathbb{P}\left(C_{k+1}\right) = p_{k+1}$$

3. Formule des probabilités totales avec le systèmes complets $(G_1, \overline{G_1})$
ou bien

$$\begin{aligned} p_{k+2} = \mathbb{P}(C_{k+2}) &= \mathbb{P}\left(\left[G_1 \cap \overline{G_2} \cap C_k\right] \sqcup \left[\overline{G_1} \cap C_{k+1}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap C_k\right) + \mathbb{P}\left(\overline{G_1} \cap C_{k+1}\right) \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{3} P_k + \frac{1}{3} P_{k+1} \end{aligned}$$

4. Théorie des suites classiques d'ordre 2.

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

1. On considère l'événement

   G_a : " Au départ ma fortune au départ est de a euro et j'ai gagné, CàD ruiné l'autre.

   D : j'ai gagné le première partie

   On a $G_a = (D \cap G_{a+1}) \cup \left(\overline{D} \cap G_{a-1}\right)$

$$\begin{aligned} p_a = \mathbb{P}(G_a) &= \mathbb{P}\left[(D \cap G_{a+1}) \cup \left(\overline{D} \cap G_{a-1}\right)\right] \\ &= \mathbb{P}(D \cap G_{a+1}) + \mathbb{P}\left(\overline{D} \cap G_{a-1}\right) - \mathbb{P}\left[(D \cap G_{a+1}) \cap \left(\overline{D} \cap G_{a-1}\right)\right] \end{aligned}$$

   De plus les événements $(D \cap G_{a+1})$ et $\left(\overline{D} \cap G_{a-1}\right)$ sont incompatibles

   en effet $(D \cap G_{a+1}) \cap \left(\overline{D} \cap G_{a-1}\right) = D \cap \overline{D} \cap \cdots = \varnothing$

   De plus les événements D et G_{a+1} sont successif et indépendants donc $\mathbb{P}(D \cap G_{a+1}) = \mathbb{P}(D)\,\mathbb{P}(G_{a+1}) = p\, p_{a+1}$

$$\text{Conclusion : } p_a = p\, p_{a+1} + q\, p_{a-1}$$

   On poursuit utilisant de la théorie classique des suite d'ordre 2.

   On calcule les constante avec $p_0 = 0$ et $p_N = 1$.