Dénombrement.

Le programme officiel

Cardinal d'un ensemble fini.

> Cardinal d'un ensemble fini.

Notations |A|, Card(A).

Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.

> Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

> Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

> Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.

La formule du crible est hors programme.

> Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.

> Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Listes et combinaisons

> Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.

Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.

> Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.

Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

1 Un peu de théorie.

1.1 Cardinal d'un ensemble fini.

Définition 1.
On dit qu'un ensemble non vide $\mathbb{E}$ est fini

Ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur $\mathbb{E}$.

Dans ce cas, l'entier n est unique et est appelé cardinal de $\mathbb{E}$

Le cardinal est noté $card(\mathbb{E})$, $|\mathbb{E}|$ ou encore $\#(\mathbb{E})$.

Par convention, l'ensemble vide $\varnothing$ est "fini" et $card(\varnothing) = 0$.

De plus on a

$$\boxed{\text{On a} \quad card\Big(A \cup \{e\}\Big) = \begin{cases} = card(A) + 1 & Si\ e \notin A \\ = card(A) & Si\ e \in A \end{cases}}$$

`Remarque. Intuitivement, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.`

Démonstration : C'est "évident" mais il faut une démonstration.
Soit A un ensemble fini et on note $card(A) = n$ et φ une bijection de A sur $\{1, 2, \ldots, n\}$

> Lorsque $e \in A$ alors $A \cup \{e\} = A$ fini.
et φ est une bijection de $A \cup \{e\} = A$ sur $\{1, 2, \ldots, 1n\}$

> Lorsque $e \notin A$, on fabrique une bijection φ' de $A \cup \{e\}$ sur $\Big\{1, 2, \ldots, n, (n+1)\Big\}$ avec
Si $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\varphi'(x) = \varphi(x) \in \{1, , 2, \ldots, n\}$ et Si $x = e$, $\varphi'(e) = n + 1$

Théorème 2. Bon sens
> On suppose que $A \subset B$
Alors $card\,(A) \leqslant card(B)$.

> On suppose que $A \subsetneq B$
Alors $card\,(A) < card(B)$.

Et enfin on a le célèbre $\left.\begin{array}{c} A \subset B \\ card\,(A) = card(B) \end{array}\right\} \Longrightarrow A = B.$

Démonstration : C'est "évident" mais if faut une démonstration.
On suppose que $card(A) = n$ et que $A \subset B$
alors $B = A \cup \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \cdots \cup \{e_p\}$.
Comme $card(A) = n$, il existe une bijection h de A sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.
On fabrique une bijection h' de $B = A \cup \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \cdots \cup \{e_p\}$ sur $\{1, 2, \ldots, n, n+1, .., n+p\}$

avec $\forall a \in \mathscr{A}$, $h'(a) = h(a)$ et $\forall\, i \in \{1, 2, .., p\}$ $h'(e_i) = n + i$

Théorème 3. cardinal et bijection
Soit A et B deux ensembles finis.

> $card(A) = card(B)$ Ssi il existe une bijection de A sur B
Plus précisément
$card(A) \leqslant card(B)$ Ssi il existe une injection de A à valeurs dans B.
$card(A) \geqslant card(B)$ Ssi il existe une surjection de A sur B.

> On suppose que $card(A) = card(B)$ et $h : A \longrightarrow B$ une fonction.
On a équivalence
h est injective $\Longleftrightarrow$ h est surjective $\Longleftrightarrow$ h est bijective

Démonstration :

> On va faire $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$.

Rappel : Une composée de bijection est encore une bijection.

$\boxed{\Longrightarrow ?}$

On suppose que $card(\mathbb{E}) = card(\mathscr{F}) = n < \infty$.

$\boxed{\text{On va montrer qu'il existe une bijection entre } \mathbb{E} \text{ et } \mathscr{F}.}$

Comme $card(\mathbb{E}) = n$, il existe une bijection g de $\{1, 2, ..., n\}$ sur $\mathbb{E}$.
De même comme $card(\mathscr{F}) = n$, il existe une bijection h de $\{1, 2, ..., n\}$ sur $\mathscr{F}$.
Ainsi $h \circ g^{-1}$ est une bijection de $\mathbb{E}$ sur $\mathscr{F}$.

$\boxed{\Longleftarrow ?}$

On suppose que $card(\mathbb{E}) = n < \infty$ et qu'il existe une bijection de h de $\mathbb{E}$ sur $\mathscr{F}$

$\boxed{\text{On va montrer que } card(\mathscr{F}) = n.}$

Comme $card(\mathbb{E}) = n$, il existe une bijection g de $\{1, 2, ..., n\}$ sur $\mathbb{E}$.
Ainsi $h \circ g$ est une bijection de $\{1, 2, ..., n\}$ sur $\mathscr{F}$. Donc $card(\mathscr{F}) = n$

Fini □

> On démontre les équivalences se démontre par récurrence.

1.2 Opérations sur les cardinaux

Théorème 4. Formulaires classiques.

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble et A, B des sous-ensembles.

> $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.
En particulier *Lorsque* $A \cap B = \varnothing$ *alors* $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$.

> Si $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de $\mathbb{E}$

$$\text{alors } card(\mathbb{E}) = card(A_1) + card(A_2) + ... + card(A_n)$$

`Définition` : On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de $\mathbb{E}$
Ssi $\mathbb{E} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ et les A_1 sont 2 à 2 disjoints

> $card({}^cA) = card(\mathbb{E}) - card(A)$

Généralisation : Si $B \subset A$ alors $card(A/B) = card(A) - card(B)$

Démonstration :

> Si $A \cap B = \varnothing$, Alors $A \cup B = A \cup \{b_1\} \cup \{b_2\} \cup \cdots \cup \{b_p\}$ et on utilise la formule $card(A \cup \{e\}) = card(A) + 1$.
> Puis la formule $card(E) = card(A_1) + card(A_2) + ... + card(A_n)$ se fait ensuite par récurrence.
> Pour la formule générale $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$

On va fabriquer une partition de $A \cup B$.

Comme $A \cap B$ est une parie de A je la "complète" avec A'. Ainsi $A \cup B$ et A' forment une partition de A.
Comme $A \cup B$ est une parie de B je la "complète" avec B'.

Il est clair que $A \cap B$, A' et B' forment une partition de $A \cup B$

De plus on

> $card(A \cup B) = card(A \cap B) + card(A') + card(B')$.
> $card(A) = card(A \cap B) + card(A')$
> $card(B) = card(A \cap B) + card(B')$
> $card(A \cap B) = card(A \cap B)$

> Comme A et ${}^cA$ forment une partition de E, c'est clair.

Fini □

2 Raisonnements simples.

2.1 Compter les listes ordonnées.

Définition 5. $E \times F$=Liste = liste ordonnée = liste python

Soient E, F deux ensembles finis et $p \in \mathbb{N}$.

Une 2-liste d'éléments de E et F est un élément de $E \times F$

CàD une 2-liste de E et F, c'est $(e, f) \in E \times F$

`Dans une liste, l'ordre est important et il peut y avoir des répétitions`

De plus on a : $card\left(E \times F\right) = card(E).card(F)$

Démonstration : On va démontrer que $card(E \times F) = n.p$ avec $card(E) = n$ et $card(F) = p$.

Les éléments de $E \times F$ sont les couples (e, f)

`Démonstration théorique.`

On note h une bijection de E sur $\{1, 2, ..., n\}$, ainsi on numérote les éléments de E et $E = \{e_1, ..., e_n\}$

et g une bijection de F sur $\{1, 2, ..., p\}$, ainsi on numérote les éléments de F et $F = \{f_1, ..., f_p\}$

On considère la fonction φ de $E \times F$ définie par

$$\forall (e, f) \in E \times F,\ \varphi\big((e, f)\big) = \big((e_i, f_j)\big) = i + n.\big(j - 1\big)$$

On vérifie (à faire) que φ réalise une bijection de $E \times F$ sur $\{1, 2, ..., np\}$.

On a $(e_1, f_1) \xrightarrow{\varphi} 1 + 0n,\qquad (e_2, f_1) \xrightarrow{\varphi} 2 + 0n,\quad .....(e_n, f_1) \xrightarrow{\varphi} n + 0n$

$(e_1, f_2) \xrightarrow{\varphi} 1 + n,\qquad (e_2, f_2) \xrightarrow{\varphi} 2 + n,\quad .....(e_n, f_2) \xrightarrow{\varphi} n + 2n$

$\vdots$

$(e_1, f_p) \xrightarrow{\varphi} 1 + n(p - 1),\qquad .....(e_n, f_p) \xrightarrow{\varphi} n + (p - 1)n = np$

`Démonstration pratique.`

Pour fabriquer (e, f), on suit la démarche

> Je choisis e dans E : J'ai n possibilités.

> puis je choisis f dans F : J'ai p possibilités.

Conclusion : $card(E \times F) = (NbdeChoix) \times (NbdeChoix) = n \times p$

Théorème 6. Généralisation

$$card(E_1 \times E_2 \times \cdots E_n) = card(E_1).card(E_2)...card(E_n)$$

$$card\left(E^n\right) = card(E \times E \times \cdots E) = card(E).card(E)...card(E) = [card(E)]^n$$

Exercice 1.

1. Dans $\mathbb{R}$. Combien y a-t-il de matrices D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, diagonales tel que $M^3 = I$. Puis tel que $M^2 = I$.
2. Dans $\mathbb{C}$. Combien y a-t-il de matrices D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, diagonales tel que $M^3 = I$. Puis tel que $M^2 = I$.

Exercice 2.

1. On sait que $2016 = 2^5 3^2 7$.
   Déterminer le nombre de diviseur positif de 2016
2. Même question avec $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$

2.2 Choisir p éléments parmi n.

Définition 7. Combinaison
Soient $\mathbb{E}$ un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$.
On appelle p-combinaison (ou p-combinaison sans répétition de $\mathbb{E}$,)
un ensemble de p éléments *distincts* de $\mathbb{E}$.

Ainsi une p-combinaison, c'est choisir p éléments parmi les n disponibles.

Une k-combinaison de E est une partie à k éléments de E.

Théorème 8. Choisir p éléments parmi n disponibles
Lorsque je choisis p éléments parmi n disponibles

$$\text{Alors j'ai } \binom{n}{p} \text{ possibilités}$$

Démonstration : Voir section "raisonnements par disjonction"

Exercice 3. [Correction] La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.
Après une mise initiale du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. Par exemple

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

Combien y-a-t-il de grilles possibles.

Exercice 4. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$

1. Combien existe-t-il de parties de $\{1,2,...,n\}$ qui contiennent qui contiennent un et un seul élément de $\{1,2,...,p\}$?
2. Combien existe-t-il de parties de $\{1,2,...,n\}$ qui contiennent qui contiennent au moins un élément de $\{1,2,...,p\}$?

Exercice 5. [Correction] **Démonstration combinatoire de la formule du binôme.**

Calculer le coefficient de X^k dans $(1+X)^n = (1+X)(1+X)\cdots(1+X)$

2.3 Double comptage.

Exercice 6. [Correction] **L'égalité du capitaine.**
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$.

En suivant les stratégies ci-dessous, compter combien d'équipes différentes de p personnes avec un capitaine peut-on former à partir d'un groupe de n personnes ?

> Stratégie démocratique : L'équipe désigne son capitaine.
> Stratégie du capitaine : Le capitaine choisit son équipe

En déduire l'égalité du capitaine.

2.4 Anagrammes

Théorème 9.
Combien le mot ANANAS" a-t-il d'anagramme ?

Exercice 7. Multinôme.

Quel est le coefficient de $a^2b^3c^5$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$

2.5 Compter les fonctions.

Dans cette section $\mathbb{E}$ désigne un ensemble et $\mathbb{E}_n$ désigne un ensemble de cardinal $n < \infty$.

Comment définir une fonction

Pour définir h une fonction de $\mathbb{E}_n = \{a_1, ..., a_n\}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$, il faut

> choisir $h(a_1)$, l'image de a_1
> Puis choisir $h(a_2)$, l'image de a_2
> etc ....

Théorème 10.
Soit E_n un ensemble de cardinal n

> Soit $\mathscr{F}(E_n, E_p)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{E}_n$ à valeurs dans $\mathbb{E}_p$ et on a $card\left(\mathscr{F}(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_p)\right) = p^n$

> Soit $bij(\mathbb{E}_n)$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{E}_n$ sur $\mathbb{E}_n$ et On a : $card\left(bij(\mathbb{E}_n)\right) = n!$

> Soit $inj(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_p)$ l'ensemble des injections de $\mathbb{E}_n$ à valeurs dans $\mathbb{E}_p$ avec $n \leqslant p$.

On a : $card\left(inj(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_p)\right) = p.(p-1)...(p-n+1) = \dfrac{p!}{(p-n)!}$

Démonstration :

> On va décrire les éléments h de $\mathscr{F}(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_p)$
Je note $a_1, ..., a_n$ les éléments de $\mathbb{E}_n$ et $b_1, ..., b_p$ ceux de $\mathbb{E}_p$.

Un élément h de $\mathscr{F}(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_p)$ est complètement défini par les valeurs de $h(a_1), ..., h(a_n)$

> Je choisis $h(a_1)$, l'image de a_1 : J'ai p possibilités dans $\mathbb{E}_p$.
> Je choisis $h(a_2)$, l'image de a_2 : J'ai p possibilités.
....etc....
> Je choisis $h(a_n)$, l'image de a_n : J'ai p possibilités.

Conclusion : $card\,\mathscr{F}(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_p) \quad = p \times p \times .... \times p = p^n$

> On va décrire les éléments h de $inj(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_p)$
Comme $card(\mathbb{E}_n) \leqslant card(\mathbb{E}_p)$ on sait qu'il existe des injections de $\mathbb{E}_v$ dans $\mathbb{E}_p$.
Je note $a_1, ..., a_n$ les éléments de $\mathbb{E}_n$ et $b_1, ..., b_n$ ceux de $\mathbb{E}_p$.

Un élément h de $inj(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_p)$ est complètement défini par les valeurs de $h(a_1), ..., h(a_n)$

> Je choisis l'image $h(a_1)$ de a_1 : J'ai p possibilités dans $\mathbb{E}_p$.
> Je choisis l'image $h(a_2)$ de a_2 : J'ai $(p-1)$ possibilités *car on doit éviter* $h(a_1)$.
....etc....
> Je choisis l'image $h(a_n)$ de a_n : J'ai $(p-n+1)$ possibilités *car on doit éviter* $h(a_1), ..., h(a_{n-1})$.

Conclusion : $card\left(In(\mathbb{E}_n, \_p)\right) \quad = p \times (p-1) \times .... \times (p-n+1) = \dfrac{p!}{(p-n)!}$

3 Disjonction, récurrence.

3.1 Disjonction : Compter les fonctions surjectives.

Compter les surjections est difficile et n'est pas au programme.
Il n'y pas de formule générale mais voici deux exemples.

Théorème 11.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $surj(\mathbb{E}_{n+1}, \mathbb{E}_n)$ l'ensemble des surjections de $\mathbb{E}_{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{E}_n$.

$$\text{On a :} \quad card\left[surj(\mathbb{E}_{n+1}, \mathbb{E}_n)\right] = \binom{n+1}{2}.n.(n-1)!$$

Démonstration : On va décrire les surjections h de $\mathbb{E}_{n+1}$ sur $\mathbb{E}_n$.
Comme $card(\mathscr{D}_{épart}) = card(\mathbb{E}_{n+1}) = n+1$ et $card(\mathscr{A}_{rrivée}) = card(\mathbb{E}_n) = n$,
il y a deux éléments qui ont la même image et pour les autres c'est du "one to one".

> Je choisis 2 éléments au départ : J'ai $\binom{n+1}{2}$ possibilités.n possibilités.
Et je choisis leur image commune : J'ai n possibilités.

> Il reste $(n-1)$ éléments au $\mathscr{D}_{épart}$ à envoyer bijectivement sur $(n-1)$ éléments au $\mathscr{A}_{rrivée}$:
J'ai $(n-1)!$ possibilités.

Conclusion : $card\left(Surj(\mathbb{E}_{n+1}, \mathbb{E}_n)\right) = \binom{n+1}{2}.n.(n-1)!$

3.2 Disjonction : Compter les ensembles.

Théorème 12.
Soit $\mathbb{E}$ un ensemble à n élément.

> Soit $k \in \{1, 2, .., n\}$. On note $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties E ayant exactement k éléments.

On a alors $card\left(\mathscr{P}_k(\mathbb{E})\right) = \binom{n}{k}$.

> On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties E ayant exactement $0, 1, ..$ ou n éléments.

On a $card(\mathscr{P}(\mathbb{E})) = 2^n$

Démonstration :
> Choisir un élément de $\mathscr{P}_k(\mathbb{E})$, c'est choisir k éléments de E parmi les n disponibles.
Il y a donc $\binom{n}{k}$ possibilité.

> Il est clair que les $\mathscr{P}_p(\mathbb{E})$ forment une partition Ainsi

$$\begin{aligned} card(\mathscr{P}(\mathbb{E})) &= card(\mathscr{P}_0(\mathbb{E})) + card(\mathscr{P}_1(\mathbb{E})) + ... + card(\mathscr{P}_n(\mathbb{E})) \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} \\ &= \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \\ &= (1+1)^n = 2^n \end{aligned}$$

Fini □

Exercice 8. [Correction] **D'après de la banque CCP.** On considère un ensemble E avec n éléments

1. On note A le nombre de partie X de E. On a donc $X \subset E$.
   (a) Calculer le nombre A_k de partie X de E ayant exactement k éléments
   (b) En déduire que $A = 2^n$
2. On note B le nombre de couples (X, Y) avec X,Y sont des parties de E et $X \subset Y$.
   (a) Calculer le nombre B_k de couples (X, Y) et $card(Y) = k$
   (b) En déduire que $B = 3^n$

3.3 Récurrence Démonstration de p éléments parmi n

Théorème 13. Choisir p éléments parmi n disponibles
Lorsque je choisis p éléments parmi n disponibles

$$\text{Alors j'ai } \binom{n}{p} \text{ possibilités}$$

Démonstration.

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble à n éléments et $p \in \{1, 2, ..., n\}$

Je note $\left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle$ le nombre de possibilités quand on choisit p éléments parmi les n disponibles, ainsi $\left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle$ est le nombre de p-combinaisons.

$$\boxed{\text{On va montrer que : } \left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle = \binom{n}{p}}$$

> On va décrire les p-combinaisons de $\mathbb{E}$.

On sait que les p-combinaison, un ensemble **non ordonné** de p éléments **distincts** de $\mathbb{E}$.
Je pointe un élément a particulier de $\mathbb{E}$ et je note C une p-combinaison.

Il y a 2 situations **disjointes**

Situation 1. $a \in C$

Alors la p-combinaison C est alors constituée de l'élément a et de $(p-1)$ autres à choisir parmi les $(n-1)$ restants

Il y a $\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ p-1 \end{matrix} \right\rangle$ p-combinaison contenant a.

Situation 1. $a \notin C$

Alors la p-combinaison C est alors constituée de p élément à choisir parmi $(n-1)$ (on ne prend pas a).

Il y a $\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ p \end{matrix} \right\rangle$ p-combinaison ne contenant pas a.

Conclusion : Les nombres $\left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle$ vérifient la formule du pochoir,

$$\text{CàD } \left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ p-1 \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} n \\ p-1 \end{matrix} \right\rangle$$

> Pour conclure, on fait par récurrence $H < n >$: $\Big| \forall p \in \{0, 1, ..., n\}, \left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle = \binom{n}{p}$

Remarque la démonstration n'est pas tout à fait juste. Pour l'hérédité fonctionne, il faut $p \in \{2, 3, ..., n\}$ car la formule du pochoir que l'on a établi, est valide pour $p \geqslant 2$.

> Pour $p = 0$. le nombre $\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle$, n'est pas défini. Il faut convenir que $\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1$. Ainsi $\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1 = \binom{n}{0}$

> Pour $p = 1$. il faut justifier que $\left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = n$. C'est facile avec la définition de $\left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle$. Ainsi $\left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = n = \binom{n}{1}$.

Exercice 9. difficile **Les dérangements.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que : f est un dérangement de $\{1, 2, .., n\}$ Ssi $\begin{cases} f \textit{ est une bijection de } \{1, .., n\} \textit{ sur } \{1, .., n\} \\ \textit{et} \\ \forall k \in \{1, 2, .., n\}, \ f(k) \neq k \end{cases}$

On note D_n l'ensemble des dérangement le nombre de dérangement de $\{1, 2, .., n\}$ et $d_n = card(D_n)$

1. Soit $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ et E_k l'ensemble des bijections de $\{1, .., n\}$ ayant exactement $n - k$ point fixe.

   Montrer que : $card(E_k) = \binom{n}{n-k} d_k$

2. En déduire par double comptage de l'ensemble des bijections que : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.

4 Plus difficile.

4.1 Compter les fonctions strictement croissantes

Théorème 14. Fonction strictement croissante

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.
Je note $\mathbb{E}_n = [\![1, n]\!] = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $\mathbb{E}_p = [\![1, p]\!]$
Soit $\mathscr{F}_{p,n}$, l'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{E}_p, \mathbb{E}_n)$ des fonctions de $\mathbb{E}_p$ à valeurs dans $\mathbb{E}_n$

On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Im}: & \mathscr{F}_{p,n} & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbb{E}_n) \\ & f & \longmapsto & \mathrm{Im}(f) = \textit{l'image de } f \end{array}$$

La fonction Im réalise une bijection entre
- Les fonctions **strictement croissantes** de $\mathbb{E}_p$ à valeurs dans $\mathbb{E}_n$
et
- $\mathscr{P}_p(\mathbb{E}_n)$ l'ensemble des parties de cardinal p de $\mathbb{E}_n$.

Conclusion : il y a $\binom{n}{p}$ fonctions strictement croissantes de $\{1, 2, \ldots, p\}$ à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$

Démonstration :

> Lorsque f est une fonction strictement croissante alors f est injective ainsi :
l'image par Im des fonctions strictement croissantes est bien dans $\mathscr{P}_p(\mathbb{E}_n)$

> Quand on prend une partie $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ dans $\mathscr{P}_p(\mathbb{E}_n)$:
il y a une unique façon de la présenter de façon strictement croissante, CàD avec $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$.

> Pour une suite strictement croissante $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$,
il existe une unique fonction strictement croissante f tel que $f(1) = i_1, \ldots, f(p) = i_p$.

On a explicité une correspondance one to one entre
- Les éléments de $\mathscr{P}_p(\mathbb{E}_n)$, l'ensemble des parties de cardinal p de $\mathbb{E}_n$.
- Les suites strictement croissantes $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$.
- Les fonctions strictement croissantes de $\{1, 2, \ldots, p\}$ à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Conclusion : Les cardinaux sont égaux.

Fini $\square$

4.2 Méthode de l'éventail ou Compter Les fonctions "seulement" croissantes.

> On reprend les explications précédentes, ainsi identifiant $f(i)$ avec i_p, il y a une bijection entre

- Les fonctions croissantes de $\{1,2,...,p\}$ à valeurs dans $\{1,2,...,n\}$.
- Les suites croissantes $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_p \leqslant n$.

On reste à déterminer le nombre de suite avec suites croissantes $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_p \leqslant n$.

On le fait avec une autre bijection : Le principe de l'éventail.

L'idée est de "déplier" le suite croissante $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_p \leqslant n$ et de lui associer une suite strictement croissante

$$1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_p \leqslant n \quad \xrightarrow{\textit{Dépliement}} \quad 1 \leqslant \underbrace{i_1}_{j_1} < \underbrace{i_2+1}_{j_2} < \underbrace{i_3+2}_{j_3} < ... < \underbrace{i_p+(p-1)}_{j_p} \leqslant n+p-1$$

$$1 \leqslant \underbrace{j_1}_{i_1} \leqslant \underbrace{j_2-1}_{i_2} \leqslant \underbrace{j_3-2}_{i_3} \leqslant ... \leqslant \underbrace{j_p-(p-1)}_{i_p} \leqslant n \quad \xleftarrow{\textit{Repliement}} \quad 1 \leqslant j_1 < j_2 < ... < j_p \leqslant n+p-1$$

La transformation de dépliement réalise une bijection (car Dépliement∘Repliement=id et Repliement∘Dépliement=id)

> de l'ensemble des suites seulement croissantes $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_p \leqslant n$
> sur l'ensemble des suites strictement croissantes $1 \leqslant j_1 < j_2 < ... < j_p \leqslant n+p-1$

Conclusion : il y a $\binom{n+p-1}{p}$ fonctions seulement croissantes
de $\{1,2,...,p\}$ à valeurs dans $\{1,2,...,n\}$

5 Exercices.

—— Compter dans la vie quotidienne ——

Exercice 10. [Correction] **Couple.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien de couple (x, y) avec $x, y \in [\![1, n]\!]^2$?
2. Combien de couple (x, y) avec $x, y \in [\![1, n]\!]^2$ et $x \neq y$ peut-on former ?
3. Combien de couple (x, y) avec $x, y \in [\![1, n]\!]^2$ et $x \leqslant y$ peut-on former ?
4. Combien de domino ? Bonus difficile : Combien de triomino ?

Exercice 11. [Correction] **Numéro de téléphones.** On convient qu'un numéro pourra commencer par 0.

1. Combien y a-t-il de numéro à n chiffres ?
   Quel est la probabilité $p_n = \dfrac{Fav}{Tot}$ qu'un numéro à n chiffres ne contiennent pas le chiffre 9. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$
2. Combien y a-t-il de numéro à 5 chiffres ayant uniquement des chiffres impairs ?
   Quel est la probabilité $p_n = \dfrac{Fav}{Tot}$ qu'il n'y ait que des chiffres impairs distincts ?
3. On note a_n le nombre de numéro avec n chiffre dont la somme est pair.
   Calculer a_n en fonction de de a_{n-1} puis calculer a_n.
4. On suppose que $n \leqslant 10$. Combien y a-t-il de numéro dont les chiffres forment une liste strictement croissante ?

Exercice 12. [Correction] **Anagramme.**

1. Combien le mot ANANAS a-il d'anagramme ?
2. Je choisis 3 lettres parmi les lettres du mot ANANAS.
   Quel est la probabilité de pouvoir écrire le mot ANA ? et celle de SAN ?
3. Combien y a t-il d'anagrammes du mot PREPA tels que toutes les consonnes sont au début ?

Exercice 13. [Correction] **Loto.** Il y a 49 boules numérotés de 1 à 49. On tire 6 boules *simultanément*.

Rappel : Le loto est un impôt sur ceux qui ne comprennent pas les probabilité (et les statistiques)

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Quelle est la probabilité de tirer la boule 41 ? Quelle est la probabilité de tirer les boules 41 et 42 ?
3. Quelle est la probabilité que le tirage ne contienne que des boules avec un numéro pair ?
4. Très Difficile Quelle est la probabilité que le résultat ne contenant pas deux numéros consécutifs ?

Exercice 14. [Correction] **Dictionnaire.** On rappelle que notre alphabet contient 26 lettres dont 6 voyelles et 20 consonnes.

1. Combien de mot de 4 lettres, avec et sans répétition, peut-on former ?
2. Combien de mot de 4 lettres qui alternent une voyelle et une consonne peut-on former ?
3. Dans le dictionnaire, combien de mot de 4 lettres se trouve avant le mot HEDI.
4. Combien de mot de 7 lettres contenant le sous-mot MPSI peut-on écrire ?

Divers

Exercice 15. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 3$. On trace dans un plan n droites en position générale (CàD deux d'entre elles ne sont jamais ni parallèles ni trois d'entre elles concourantes).

1. Combien y a-t-il de points d'intersection ?
2. Combien y a-t-il de points de triangle ?

Exercice 16. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1,\ p_2, \dots, p_n$ des personnes.

1. De combien de façon peut-on asseoir n personnes sur un banc (par nature rectiligne) ?
2. Même question autour d'une table ronde ?

Exercice 17. [Correction] On considère un quadrillage régulier avec n lignes horizontales et n lignes verticales

1. Combien y a-t-il de rectangle ?
2. Plus difficile Combien y a-t-il de carré ?

Exercice 18. [Correction] Vraiment difficile L'intrépide chenille se présente devant un grillage à maille carrée.

Elle part de la "position" $(0,0)$ et doit atteindre la "position" $(5,8)$.
Elle se déplace uniquement vers la droite ou vers le haut.

Combien a-t-elle de chemins possibles ?

Exercice 19. Très difficile Une classe de MPSI contient 33 élèves

Combien y-a-t-il de façon différente de repartir la classe en 11 groupes de colle ?

Le jeu c'est la vie et c'est pas forcément simple

Exercice 20. [Correction] **Le Yam's ou Yatzé**. On lance 3 dés de couleurs différentes. Ici : $probabilité = {}^{Favorable}/_{Total}$

1. Combien y a-t-il de lancers différents ?
2. Quel est la probabilité d'avoir 3 faces différentes ?
3. Quel est la probabilité d'avoir au moins un six ?
4. Quel est la probabilité d'avoir exactement un six ?
5. Quel est la probabilité d'avoir au moins 2 faces identiques ? d'avoir exactement 2 faces identiques ?

Exercice 21. [Correction] **Poker avec correction détaillée.**
On joue au poker avec un jeu de 52 carte (4 couleurs $\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$ et 13 hauteurs $2, 3, \dots, D, R, As$).
On distribue 5 cartes.

Combien y a-t-il de mains différentes ?
Quelle est la probabilité d'avoir un full ? avoir une paire ? de ne rien avoir ?

Exercice 22. [Correction] **Poker avec solution non détaillée.**
On distribue 5 cartes.

1. Combien y a-t-il de main possible ?
2. Quel est la probabilité d'avoir un carré ?
3. Quel est la probabilité d'avoir un full ?
4. Quel est la probabilité d'avoir une couleur ?
5. Quel est la probabilité d'avoir une quinte ou suite ?
6. Quel est la probabilité d'avoir une quinte flush ?
7. Quel est la probabilité d'avoir une simple paire ?
8. Quel est la probabilité d'avoir une double paire ?
9. Quel est la probabilité de n'avoir RIEN ?

Correction.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Je choisis 3 cases parmi les 9 disponibles

Ainsi il y a $\binom{9}{3}$ possibilités.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) On développe $(1+X)^n = \underbrace{(1+X)}_{Facteur\ 1}\underbrace{(1+X)}_{Facteur\ 2} \dots \underbrace{(1+X)}_{Facteur\ n}$

Pour fabriquer X^k,

je choisis k facteurs il y a $\binom{n}{k}$ possibilités

et dans chacun de ces k facteurs je choisis le monôme X il y a 1 possibilités

et dans chacun des $(n-k)$ autres facteurs je choisis le nombre 1 il y a 1 possibilités

Conclusion : Il y a $\binom{n}{k}$ choix qui aboutissent à X^k,

c'est le coefficient de X^k dans le développement.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On va compter de 2 façons différentes

`Combien d'équipes différentes de` p `personnes avec un capitaine peut-on former à partir d'un groupe de` n `personnes.`

Stratégie démocratique.

> Je choisis p personnes pour faire l'équipe

J'ai $\binom{n}{p}$ possibilités.

> Puis on désigne, dans l'équipe, un capitaine

J'ai p possibilités.

Conclusion : Il y a : $p\binom{n}{p}$ équipes

Stratégie du capitaine.

> Je choisis 1 capitaine

J'ai n possibilités.

> Puis on complète l'équipe

J'ai $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités.

Conclusion : Il y a : $n\binom{n-1}{p-1}$ équipes

Conclusion : $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

Remarque : On peut aussi démontrer l'égalité en détaillant les factoriels.

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) **Ensemble.** On considère un ensemble E avec n éléments

1. On note A le nombre de partie X de E. On a donc $X \subset E$.
   (a) $card(A_k) = \binom{n}{k}$
   (b) $card(A) = card(A_0) + card(A_1) + \dots + card(A_n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k = (1+1)^n = 2^n$
2. On note B le nombre de couples (X,Y) avec X,Y sont des parties de E et $X \subset Y$.
   (a) $card(B_k) = \binom{n}{k}2^k$
   (b) $card(B) = card(B_0) + card(B_1) + \dots + card(B_n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = (1+2)^n = 3^n$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé) Un couple étant une liste ordonnée.

> Je choisis x

J'ai n possibilités.

> Puis je choisis y

J'ai $n-1$ possibilités.

Conclusion : Il y a donc $n(n-1)$ couples possibles.

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

Nombres. On convient qu'un nombre pourra commencer par 0.

1. 10^n. On a $p_n = \dfrac{9^n}{10^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. $5\times5\times5\times5\times5$ et $5\times4\times3\times2\times1$
3. $\dfrac{10^n}{2}$.

Solution de l'exercice 12 (Énoncé) Le mot ANANAS a (3 A), (2 N) et (1 S).

Pour faire un anagramme, je dois placer ces 6 lettres dans 6 positions disctinctes

P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6

> Je choisis les places des 3 A, CàD 3 places parmi les 6 disponibles

J'ai $\binom{6}{3}$ possibilités

> Je choisis les places des 2 N, CàD 2 places parmi les 3 restantes

J'ai $\binom{3}{2}$ possibilités.

> Je choisis la place du S, CàD 1 place parmi la seul restante

J'ai $\binom{1}{1}$ possibilité.

Conclusion : ANANAS a $\binom{6}{3}.\binom{3}{2}.\binom{1}{1} = 60$ anagrammes.

Compléments :

- Si on commence par placer les N puis le S et enfin les A,

on obtient le décompte $\binom{6}{2}.\binom{4}{1}.\binom{3}{3}$ qui est bien égale à 60.

Ouf on a trouvé le même résultat.

Donc le décompte final ne dépend pas de l'ordre choisi pour fabriquer l'anagramme.

- Si on détaille les factoriels et on simplifie, on trouve $\dfrac{6!}{3!2!1!} = 60$.

Chacun imaginera et démontrera la formule générale du nombre d'anagramme.

Solution de l'exercice 13 (Énoncé) 1. Un tirage, c'est choisir 6 boules parmi 49, il y a donc $\binom{49}{6}$ tirages différents.

2. Un tirage contient la boule 41 Ssi il y a 41 (1 possibilité) et 5 autres boules ($\binom{48}{5}$ possibilités)

   Conclusion : il y a $1\times\binom{48}{5}$ tirages contient la boule 41.

   De même il y a $1\times1\times\binom{47}{4}$ tirage contient les boules 41 et 42.

3. Un tirage ne contient que des boules avec un numéro pair Ssi on choisit 6 parmi les 24 qui ont un numéro pair

   Conclusion : il y a $\binom{24}{6}$ tirages

4. Très Difficile Il faut utiliser le principe de l'éventail dans le sens du repliement

   Conclusion : il y a $\binom{44}{6}$ tirages ne contenant pas deux numéros consécutifs.

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

1. Je choisis la première lettre, j'ai 26 possibilités.
   Puis Je choisis la deuxième puis la troisièmes et enfin la quatrièmement lettre

   Conclusion : j'ai $26.26.26.26 = 26^4$ possibilités.

2. IL y a 2 situations selon que l'on commence par Voyelle ou une Consonne.

   > Situation VCVC, il y a $6.20.6.20$ possibilités.
   > Situation CVCV, il y a $20.6.20.6$ possibilités.

   Conclusion : j'ai $2 \times (6.20.6.20)$ possibilités.

3. On compte selon que le mot commence par A,B,... ou G, par H, par HE, par HED

   > Mots de 4 lettres qui commence par A,B,... ou G et donc avant le mot HEDI : Il y a $7.26.26.26$ possibilités.
   > Mots de 4 lettres qui commence par H mais pas HE et avant le mot HEDI : Il y a $4.26.26$ possibilités.
   > Mots de 4 lettres qui commence par HE mais pas HED et avant le mot HEDI : Il y a 3.26 possibilités.
   > Mots de 4 lettres qui commence par HED et avant le mot HEDI : Il y a 8 possibilités.

   Conclusion : j'ai $7.26.26.26 + 4.26.26 + 3.26 + 8$ possibilités.

4. Comme le mot MPSI a 4 lettres, il faut impérativement placer la lettre M de MPSI en position 1,2,3 ou 4.
   > Je choisis la place du M et j'écris MPSI
   J'ai 4 possibilités.

   > Puis on complète les trois positions restantes sans restriction.
   Pour chaque positions j'ai 26 possibilités

   Conclusion : il y a $4.26^3 = 70\,304$ mots de 7 lettres contenant le mots MPSI.

   `Compléments` : L'exercice est plus délicat qu'il y parait. Si je change MPSI ou le nombre de lettre il y a des problèmes.

   - **Si on compte les mots de $\boxed{8}$ lettres contenant MPSI**, avec le même raisonnement, on compte 2 fois le mots MPSIMPSI une fois quand M est placé en première position avec $\underbrace{MPSI}\,MPSI$ et une fois que quand M est placé en 5-ième position avec $MPSI\,\underbrace{MPSI}$

   - **Si on compte les mots de 7 lettres contenant $\boxed{\text{MPMP}}$**, avec le même raisonnement, on compte 2 fois le mots MPMPMPA une fois quand M est placé en première position avec $\underbrace{MPMP}\,MPA$ et une fois que quand M est placé en 3-ième position avec $MP\,\underbrace{MPMP}\,A$

   - Pour plus de renseignement voir : Le paradoxe de Penney.

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

1. Pour fabriquer un point, il faut 2 droites distinctes

   je choisis 2 droites parmi les n disponibles, ainsi il y a $\binom{n}{2}$ possibilités.

2. Pour fabriquer un triangle, il faut 2 droites distinctes

   je choisis 3 droites parmi les n disponibles, ainsi il y a $\binom{n}{3}$ possibilités.

Solution de l'exercice 16 (Énoncé)

1. **Sur un banc.**

   Il y a n personnes distincte $p_1, ..., p_n$ et sur le banc, il y a n positions bien distinctes.
   Je vais placer successivement les personnes sur le banc.

   > Je place la première personne p_1
   J'ai n possibilités.

   > Je place la deuxième personne p_2 à une autre position que p_1
   J'ai $n-1$ possibilités.

   ...etc...

   Conclusion : Sur un banc, il y a $n!$ configurations possibles.

2. **Autour d'une table ronde.**

Il y a toujours n personnes distincte $p_1, ..., p_n$ et n positions.

Mais autour d'une table, les position ne sont pas clairement les identifier.

Pour numéroté les places, je dois choisir arbitrairement une place et ensuite numéroter les positions à partir de cette référence en tournant dans le sens trigonométrique.

$>$ Je place n'importe où la première personne p_1 qui alors me sert de référence pour numéroté les positions de la table dans le sens trigo.

$>$ Je place la deuxième personne p_2 à une autre position

J'ai $n-1$ possibilités.

$>$ Je place la troisième personne p_3 à une position distincte de p_1 et p_2

J'ai $n-2$ possibilités. ...etc...

Conclusion : Autour d'une table, il y a $(n-1)!$ configurations possibles.

Solution de l'exercice 17 (Énoncé)

1. Pour faire un rectangle, il faut deux droites verticales et deux droites horizontales

Conclusion : Il y a $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ rectangle.

2. Plus difficile On compte le nombre de carrée de taille 1 il y en $(n-1)^2$, puis de taille 2, puis ...., puis de taille $(n-1)$ il y en 1^2

À la fin on trouve $\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 = \sum_{p=1}^{n-1} p^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

Solution de l'exercice 18 (Énoncé)

Un "voyage" est une succession de 5 déplacements vers la droite et de 8 déplacement vers le haut,

c'est donc un anagramme sur le "mot" : dddddhhhhhhhh et il y a $\frac{13!}{5!8!}$ "voyages" différents

Solution de l'exercice 20 (Énoncé) **Jeu de Dés**.

1. 6^3
2. $\left(6^3 - 5^3\right)/6^3$ (complémentaire)
3. Pour le favorable : je choisis le dés qui va donner 6 puis la valeur des 2 autres donc $\binom{3}{1} \times 1 \times 5 \times 5$
4. Pour le favorable : On utilise le complémentaire $6^3 - 6 \times 5 \times 4$.

Solution de l'exercice 21 (Énoncé) **Combien de mains différente ?**

On distribue 5 cartes mais à la fin on ne se préoccupe pas de l'ordre d'arrivée des cartes

Je choisis 5 cartes parmi les 52 disponibles dans le paquet.

Conclusion : Il y a $\binom{52}{5} = 2,598,960$ mains différentes.

Probabilité d'avoir un full ?

$>$ Je choisis mes trois cartes de même hauteur.

- Je commence par choisir la hauteur : $\binom{13}{1}$ possibilités
- Puis je choisis 3 cartes de cette hauteur : $\binom{4}{3}$ possibilités

$>$ Je choisis ma paire en plus.

- Je commence par choisir la hauteur : $\binom{12}{1}$ possibilités (on évite la hauteur précédente)
- Puis je choisis 2 cartes de cette hauteur : $\binom{4}{2}$ possibilités

Conclusion : Il y a $\binom{13}{1}.\binom{4}{3}\binom{12}{1}.\binom{4}{2} = 3744$ full différents.

La probabilité d'avoir un full est donc $\frac{18816}{2598960} \approx 0.0014$

Probabilité d'avoir exactement une paire ?

$>$ Je choisis ma paire.

- Je commence par choisir sa hauteur puis 2 cartes : $\binom{13}{1}\binom{8}{2}$ possibilités

$>$ Je choisis les cartes restantes *(difficiles il ne faut créer par mégarde une autre paire ! ! !)*

- Je commence par choisir leur hauteur puis leur valeur : $\binom{12}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$ possibilités.

Conclusion : Il y a $\binom{13}{1}\binom{8}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 1,098,240$ mains avec exactement une paire.

La probabilité d'avoir une paire est donc $\frac{1098240}{2598960} \approx 0.42$

Probabilité de ne rien avoir ?

$>$ Je choisis 5 hauteurs différentes et une carte dans chacune des hauteurs. *(Attention, l'approche naïve $52\times48\times44\times40\times36$ est fausse.)*

J'ai $\binom{13}{5}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 1,317,888$ possibilités.

$>$ MAIS dans ce total, il faut retirer

- Les $\binom{4}{1}\binom{8}{5} = 5148$ couleurs
- Les $\binom{9}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 9216$ suites

Mais on a retiré 2 fois les $\binom{9}{1}\binom{4}{1} = 36$ suites couleurs, il faut donc les rajouter

Conclusion : Il y a $1317888 - 5148 - 9216 + 36 = 1303560$ mains de merde.

La probabilité d'avoir une main de merde est donc $\frac{1303560}{2598960} \approx 0.50$

Solution de l'exercice 22 **(Énoncé)** **Jeu de poker.**

1. $\binom{52}{5}$
2. Combien de carré : $\binom{13}{1}\times\binom{4}{4}\times\binom{48}{1}$
3. Combien de full : $\binom{13}{1}\times\binom{4}{3}\times\binom{12}{1}\times\binom{4}{2}$
4. Combien de couleur : $\binom{4}{1}\times\binom{13}{5}$
5. Combien de quinte ou suite : $9\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}$

   Explication

   → On choisit la hauteur de la plus haute carte de quinte : il y a 9 possibilités

   → On choisit une carte dans chaque hauteur pour faire la quinte.
6. Combien de quinte flush : $9\times\binom{4}{1}$

   Explication

   → On choisit la hauteur de la plus haute carte de quinte flush : il y a 9 possibilités

   → On choisit la couleur $\binom{4}{1}$
7. Combien de simple paire : $\binom{13}{1}\times\binom{4}{2}\times\binom{12}{3}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}$

   Explication

→ On choisit la hauteur de la paire et 2 cartes pour faire la paire. $\binom{13}{1} \times \binom{4}{2}$

→ On choisit 3 hauteurs différentes pour les cartes 3 restantes et une carte par hauteur $\binom{12}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$

8. Combien de double paire : $\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{44}{1}$

   Explication

   → On choisit les hauteurs des 2 paires et 2 cartes dans chaque hauteur pour faire les paire. $\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2}$

   → On choisit une carte pour compléter la main $\binom{44}{1}$

9. Combien de brelan : $\binom{13}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$

   Explication

   → On choisit la hauteur du brelan et 3 cartes pour faire le brelan $\binom{13}{1} \times \binom{4}{3}$

   → On choisit 2 hauteurs différentes pour les 2 cartes restantes et une carte par hauteur $\binom{12}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$

10. Quel est la probabilité de n'avoir RIEN ?

    Voir cours ou bien faire le complémentaire. **Attention** la quinte flush est comptée plusieurs fois (dans les quintes et les couleurs).