

Il y a 2 sujets possibles : Exercices 1,2,3,4 OU Exercices 4,5,6
 Les exercices 3 et 5 sont les mêmes.
 Les exercices 1 et 2 sont classiques .
 L'exercice 6 est plus abstrait.

Exercice 1. [Correction]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $X^{2n} = X^n \cdot X^n$.

Calculer la dérivée n -ième de X^{2n} et en déduire $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 2. [Correction] Soit f une fonction continument dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, [f \circ f](x) = \frac{x}{2} + 3.$$

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Calculer u_n en fonction de u_0 et n .

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 6.

2. Étude de f'

(a) En remarquant que $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'\left(\frac{x}{2} + 3\right) = f'(x)$

(b) En utilisant la suite $(f(u_n))$, montrer que la fonction f' est constante égale à $f'(6)$.

3. Conclusion.

(a) Justifier qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a + b$. C'est la fin de l'analyse.

(b) Faites la synthèse et déterminer les fonctions f solutions du problème.

Exercice 3. [Correction] Soit f une fonction de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie, continue, $\mathcal{C}^\infty$.

Soit ϕ la fonction définie par l'expression

$$\phi(x) = \int_{-x}^x f(t) dt - x[f(x) + f(-x)]$$

1. Justifier que la fonction ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$ et calculer ϕ'

2. Une majoration.

(a) Montrer qu'il existe M tel que $\forall u \in [-1, 1], |f''(u)| \leq M$

(b) Montrer que : $\forall t \in [0, 1], |f'(t) - f'(-t)| \leq 2Mt^2$

(c) En déduire une majoration de $|\phi'|$ sur $[0, 1]$

3. En déduire que : $|\phi(1)| \leq \frac{2}{3}M$

Indication : On notera que $|\phi(1)| = \left| \phi(1) - \underbrace{\phi(0)}_{=0} \right|$

Exercice 4.**Partie A**

Soit f , une fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

On ne cherchera pas déterminer la fonction f .

1. Quelle est la valeur de $f'(0)$? Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$.
3. Comme la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$, on sait grâce à Taylor-Young que pour tout n , la fonction f admet un DL_n en 0. Plus précisément

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \text{ et en plus on a } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

- (a) À l'aide de la question Q2, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = \frac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}$
- (b) Obtenir également l'expression des termes a_{2k} à l'aide de $f(0)$ (k entier naturel).

Partie B

On considère la fonction $D : x \mapsto D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

1. Justifier le fait que D est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,
et vérifier que D est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.
2. Étudier la parité de D .
3. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, xe^{-x^2} \leq D(x) \leq x$.
4. (a) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$.
- (b) Soit la fonction $h : t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^2}$.

Montrer que h est croissante sur $[1, +\infty[$.

En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[, \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leq h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$

- (c) Montrer que : $\int_1^x e^{t^2} dt \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$ puis déterminer un équivalent de $D(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Attention : $\int_1^x \dots \neq \int_0^x \dots$

5. On admet que $a = D(1) > 0$
 - (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A, D(x) \leq a$.
 - (b) Démontrer que D admet et atteint son maximum en (au moins) un point b de $\mathbb{R}_+^*$.
 - (c) Montrer que ce maximum est égal à $\frac{1}{2b}$.
 - (d) En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.

Partie C

1. Déterminer à l'aide de la fonction D l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.
2. Montrer l'existence d'une unique solution impaire.

Exercice 5. [Correction] Soit f une fonction de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie, continue, $\mathcal{C}^\infty$.

Soit ϕ la fonction définie par l'expression

$$\phi(x) = \int_{-x}^x f(t) dt - x[f(x) + f(-x)]$$

- Justifier que la fonction ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$ et calculer ϕ'
- Une majoration.
 - Montrer qu'il existe M tel que $\forall u \in [-1, 1], |f''(u)| \leq M$
 - Montrer que : $\forall t \in [0, 1], |f'(t) - f'(-t)| \leq 2Mt^2$
 - En déduire une majoration de $|\phi'|$ sur $[0, 1]$
- En déduire que : $|\phi(1)| \leq \frac{2}{3}M$

Indication : On notera que $|\phi(1)| = \left| \phi(1) - \underbrace{\phi(0)}_{=0} \right|$

Exercice 6. [Correction] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de I à valeurs dans $\mathbb{R}$,

On dit que la fonction f est Absolument Monotone sur I Ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$.

Exemple : La fonction $\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp^{(n)}(x) = e^x \geq 0$

Donc la fonction $\exp$ est Absolument Monotone sur $\mathbb{R}$

- Généralités et Exemples.
 - Soient f et g deux fonctions Absolument Monotone sur I .
Montrer que les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont Absolument Monotone sur I .
 - Soit la fonction $f : x \mapsto -\ln(1 - x)$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$, calculer $f^{(n)}(x)$. En déduire que f est Absolument Monotone sur $[0, 1[$.
 - À partir du lien entre $\tan'$ et $\tan$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$
En déduire que la fonction $\tan$ est Absolument Monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0^+ .
On suppose dans cette question que la fonction f est Absolument Monotone sur $]0, b[$ avec $b > 0$.
 - Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 et $f(0) \geq 0$.
 - Montrer que le prolongement est $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) \geq 0$.
 - Un tel prolongement est-il possible en b ?
- Égalité de Taylor avec reste intégrale.

On pourra admettre l'égalité ci-dessous qui est programme
mais que l'on verra en fin d'année seulement

Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, b[$ avec $b > 0$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, b[, f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

4. Série de Taylor.

On considère dans cette question que la fonction f est Absolument Monotone sur $[0, b[$ avec $b > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, b[$, on considère

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{et} \quad R_n(x) = \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

La question précédente Q3. assure que $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$

(a) Montrer que la suite $(S_n(x))$ converge.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 < x < y < b$.

i. Montrer que : $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu) \frac{(1-u)^n}{n!} du$

ii. En déduire que : $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$

iii. Montrer que la suite $(S_n(x))$ converge vers $f(x)$

Commentaire/Interprétation/application :

Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. La série de Taylor associée à f , c'est $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

En comportement de la série de Taylor est assez divers.

Elle peut diverger, converger mais pas forcément vers $f(x)$

On vient de démontrer que Si/Lorsque la fonction f est Absolument Monotone sur $[0, b[$

Alors la série de Taylor converge vers $f(x)$, on a donc $\forall x \in [0, b[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$

Application : la fonction $\exp$ est Absolument Monotone sur $\mathbb{R}$,

donc $\forall x \geq 0, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On trouve
2. On a avec Leibniz

$$[x^{2n}]^{(n)} = [x^n x^n]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \dots$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

Soit f une fonction définie, continue et continument dérivable (ainsi. f' existe et est continue) sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [f \circ f](x) = f\left(\frac{x}{2} + 3\right).$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et Si $n \geq 0$, alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

1. C'est une suite arithmético-geo. On trouve que à la fin que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 6$.

2. Etude de f'

(a) On a

$$[f \circ (f \circ f)](x) = f((f \circ f)(x)) = f\left(\frac{x}{2} + 3\right)$$

$$[(f \circ f) \circ f](x) = (f \circ f)(f(x)) = \frac{f(x)}{2} + 3$$

(b) Comme $f \circ (f \circ f) = f \circ f \circ f = (f \circ f) \circ f$, on a

$$f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{f(x)}{2} + 3$$

On dérive l'égalité,

$$\text{On a donc } \left[f\left(\frac{x}{2} + 3\right)\right]' = \left[\frac{f(x)}{2} + 3\right]'$$

$$\iff \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{1}{2}f'(x) \text{ Fini}$$

(c) D'une part.

→ Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 6$, on a donc $f'(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(6)$.

(d) D'autre part.

→ On a $f'(u_{n+1}) = f'\left(\frac{1}{2}u_n + 3\right) = f'(u_n)$

→ La suite $(f'(u_n))$ est donc une suite constante donc on a bien

$$f'(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(u_0).$$

(e) Donc on a $f'(u_0) = f'(6)$. Cette égalité est valide pour toutes les valeurs de u_0 donc je l'applique avec $u_0 = x$

Conclusion : $f'(x) = f'(6)$ **pour tout x**

La fonction f' est donc une fonction constante.

3. Comme $f'(x) = a$, alors forcément $f(x) = ax + b$

On a montrer que : **SI** la fonction f vérifie la relation (E)
Alors forcément on doit avoir $f(x) = ax + b$

On va chercher parmi ces fonctions celles qui vérifie effectivement (E)

$$[f \circ f](x) = \frac{x}{2} + 3$$

$$\iff a(ax + b) + b = \frac{x}{2} + 3$$

$$\iff a^2x + ba + b = \frac{x}{2} + 3$$

Donc Ce donc est-il vraiment clair ? $a^2 = \frac{1}{2}$ et $b(a + 1) = 3$

Il y a donc deux fonctions qui vérifient $[f \circ f](x) = \frac{x}{2} + 3$

$$f(x) = \frac{+1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\frac{-1}{\sqrt{2}} + 1}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie continue, C^∞ .

Soit ϕ la fonction

$$\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} ; \quad x \mapsto \int_{-x}^x f(t) dt - x[f(x) + f(-x)]$$

1. Comme f est C^∞ sur $[-1, 1]$, elle admet des primitives C^∞ sur $[-1, 1]$. On note H l'une d'elle.

On a maintenant

$$\phi(x) = [H(x) - H(-x)] - x[f(x) + f(-x)] \text{ existe Ssi } x \in [-1, 1].$$

Ainsi ϕ est C^∞ sur $[-1, 1]$.

On a $\forall x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \left(\int_{-x}^x f(t) dt - x[f(x) + f(-x)] \right)' \\ &= \left(\int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} f(t) dt - x[f(x) + f(-x)] \right)' \\ &= f(x) - (-1)f(-x) - [f(x) + f(-x)] - x[f'(x) + (-1)f'(-x)] \\ &= -x[f'(x) - f'(-x)] \end{aligned}$$

2. Soit $x \in [0, 1]$ fixé. On a

$$\begin{aligned} |\phi'(x)| &= |-x[f'(x) - f'(-x)]| = \left| -x \int_{-x}^x f''(t) dt \right| \\ &\leq |x| \left| \int_{-x}^x |f''(t)| dt \right| \end{aligned}$$

> Majoration de l'intégrale.

f' est continue sur le segment $[-1, 1]$ donc bornée (et atteint ses bornes)

ainsi il existe M tq $\forall t \in [-1, 1], |f''(t)| \leq M$

> On intègre sur $[-x, x] \subset [-1, 1]$ ainsi

$$|\phi'(x)| \leq |x| \left| \int_{-x}^x |f''(t)| dt \right| \leq x \cdot (2xM) = 2Mx^2$$

3. On cherche à obtenir une majoration de $|\phi'(1)|$. Comme $\phi(0) = 0$, on a

$$\begin{aligned} |\phi(1)| &= |\phi(1) - \phi(0)| = \left| \int_0^1 \phi'(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |\phi'(x)| dx \leq \int_0^1 2Mx^2 dx = \frac{2M}{3} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de I à valeurs dans $\mathbb{R}$,

On dit que la fonction f est Absolument Monotone sur I Ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$.

Exemple : La fonction $\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp^{(n)}(x) = e^x \geq 0$

Donc la fonction $\exp$ est Absolument Monotone sur $\mathbb{R}$

1. Généralités et Exemples.

(a) Montrer que les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont Absolument Monotone sur I .

On a facilement que : $\forall x \in I, (f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0 + 0$

$$\text{et } (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) + g^{(n-k)}(x) \geq \sum 0$$

(b) Soit la fonction $f : x \mapsto -\ln(1-x)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$, calculer $f^{(n)}(x)$. En déduire que f est Absolument Monotone sur $[0, 1[$.

Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $f(x) = -\ln(1-x) \geq 0$ car $x \in [0, 1[\implies (1-x) \in]-1, 0]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$, on a $f'(x) = \frac{1}{1-x} \geq 0$ et $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \geq 0$

(c) À partir du lien entre $\tan'$ et $\tan$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$

On sait que : $\tan' = 1 + \tan^2$. On dérive n fois cette égalité

En déduire que la fonction $\tan$ est Absolument Monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On démontre que avec une récurrence **FORTE** : $H_{<n>} : \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \tan^{(n)}(x) \geq 0$

2. Prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0^+ .

On suppose dans cette question que la fonction f est Absolument Monotone sur $]0, b[$ avec $b > 0$.

(a) Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 et $f(0) \geq 0$.

La fonction f est croissante et minorée par 0 au voisinage de 0^+

donc d'après le théorème de la limite monotone, on a saut que la fonction f admet une limite $\ell \geq 0$ quand $x \rightarrow 0^+$

(b) Montrer que le prolongement est $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) \geq 0$.

Même argument que ci-dessus.

(c) Un tel prolongement est-il possible en b ?

Non, la fonction tangente est un contre-exemple.

3. Égalité de Taylor avec reste intégrale.

On pourra admettre l'égalité ci-dessous qui est programme mais que l'on verra en fin d'année seulement

Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, b[$ avec $b > 0$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, b[, f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

4. Série de Taylor.

On considère dans cette question que la fonction f est Absolument Monotone sur $[0, b[$ avec $b > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, b[$, on considère

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{et} \quad R_n(x) = \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

La question précédente Q3. assure que $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$

(a) Montrer que la suite $(S_n(x))$ converge.

On a $S_{n+1} - S_n = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} \geq 0$ car x et $f^{(n+1)}(0)$ sont positifs

Donc la suite $(S_n(x))$ est croissante.

De plus $R_n(x) = \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \geq 0$ car $x > 0$ et $f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \geq 0$ sur $[0, x]$

Conclusion : $S_n(x) = f(x) - R_n(x) \leq f(x)$

la suite $(S_n(x))$ est croissante et majorée par $f(x)$ donc elle converge.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 < x < y < b$.

i. Montrer que : $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu) \frac{(1-u)^n}{n!} du$

On fait le changement de variable $t = xu$

ii. En déduire que : $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$

On a déjà justifié $R_n(x) \geq 0$

$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu) \frac{(1-u)^n}{n!} du = \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} y^{n+1} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu) \frac{(1-u)^n}{n!} du$$

$$\text{Or } f^{(n+1)} \text{ est croissante et } x < y \text{ donc } f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(yu) \leq \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}}$$

$$\leq \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} R_n(y)$$

$$\leq \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} f(y) \text{ car } f(x) = S_n(x) + R_n(x) \geq 0 + R_n(x)$$

iii. Montrer que la suite $(S_n(x))$ converge vers $f(x)$

Le théorème des gendarmes assure que $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Conclusion : $S_n(x) = f(x) - R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$