Variable aléatoire, Lois

1 Variable aléatoire, Loi.

1.1 Définition.

Définition 1. Définition et vocabulaire sur les v.a.

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

> **Définition d'une v.a.** Une variable aléatoire (ou v.a.) X sur Ω à valeurs dans E est une fonction de Ω à valeurs dans E.

Si $\omega \in \Omega$ alors on peut calculer $X(\omega)$ et $X(\omega) \in E$

Lorsque $E = \mathbb{R}$, on dit que la variable aléatoire est numérique.

> **Support** Le support de la v.a. X, noté $X(\Omega)$, c'est l'ensemble des valeurs possibles de la fonction X. C'est donc $\mathrm{Im}X$.

> **Les évènements** $(X = a)$ **et** $(X \subset A)$.

Soit $a \in E$. L'évènement $X = a$, c'est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = a$

Comme $X = a$ est un évènement, on peut calculer $\mathbb{P}(X = a)$

Soit $A \subset E$. L'évènement $X \subset A$, c'est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in A$

Comme $X \subset A$ est un évènement, on peut calculer $\mathbb{P}(X \subset A)$

Généralisation, si $E = \mathbb{R}$ on peut définir de la même façon $X \leqslant M$ et $\mathbb{P}(X \leqslant M)$

Exemple : On suppose que X est une v.a. à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n, \dots\}$.

> On a ici $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

> La liste des $\mathbb{P}(X = 0), \mathbb{P}(X = 1), \dots, \mathbb{P}(X = n), \dots$ c'est la loi de la v.a. X

> Et on a $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Théorème 2.

On reprend l'exemple fondamental (mais le résultat est toujours vrai.)

On suppose que X est une v.a. à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n, \dots\}$.

Les évènements $(X = 0)$, $(X = 1)$,...,$(X = n)$,.... forment un système complet.

Comme les évènements $(X = 42)$, $(X = 641)$ sont incompatibles,

on a $\mathbb{P}\Big(X = 42 \text{ } ou \text{ } X = 641\Big) = \mathbb{P}\Big([X = 42] \cup [X = 641]\Big) = \mathbb{P}\Big([X = 42] \sqcup [X = 641]\Big) = \mathbb{P}\Big(X = 42\Big) + \mathscr{P}(X = 641)$

1.2 Les Lois classiques de sup.

Définition 3. Les lois classiques de sup

Loi uniforme.

On considère une expérience et $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé

On considère X une Variable Aléatoire sur Ω à valeurs dans $E = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$.

On dit que X suit la loi uniforme

$$\text{Ssi } \forall\, r \in E,\ \mathbb{P}\,(X = r) = \frac{1}{n} = \frac{1}{card\,(E)}$$

Loi de Bernoulli

On considère X une Variable Aléatoire et $p \in [0,1]$.

On dit que X suit la loi Bernoulli de paramètre p, notée $X \sim \mathfrak{B}\left(p\right)$

$$\text{Ssi } X \text{ est à valeurs dans } \{0,1\} \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = p$$

Cette loi modélise pour une expérience, un jeu, un pari

le succès/réussite/gain quand $X = 1$ *avec une probabilité p*

ou l'échec/perte quand $X = 0$ *avec une probabilité* $\overline{p} = 1 - p$

Loi de Binomiale.

On répète *n fois et indépendamment* une expérience aléatoire de Bernoulli de paramètre p.

On considère la v.a. X donnant le nombre de succès.

On a facilement $X\,(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ et un peu moins facilement

$$\forall\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}\,,\quad \mathbb{P}\,(X = k) = \binom{n}{k}\, p^k\, \overline{p}^{\,n-k} \qquad \text{avec } \overline{p} = 1 - p$$

On dit que X suit la loi Binomiale de paramètres $\left(n, p\right)$ et on note $X \sim \mathfrak{B}\left(n, p\right)$.

Exemple : Pauvre Lapin.

Dix chasseurs tirent simultanément sur un petit lapin avec la probabilité p de l'atteindre.

je considère la V.A. X *qui donne le nombre de plombs reçu par le pauvre lapin*

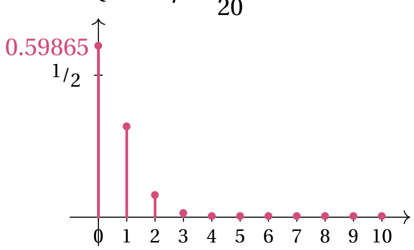
il est clair que la V.A. X suit la loi Binomiale de paramètres $\left(10, p\right)$, CàD une $X \sim \mathfrak{B}\left(10, p\right)$ ainsi

$$\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, 10\},\ \mathbb{P}\,(X = k) = \binom{10}{k}\, p^k\, \overline{p}^{\,10-k}$$

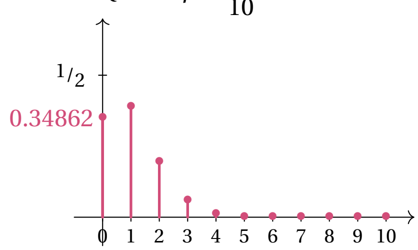
$\mathbb{P}(X = 2)$, c'est la probabilité pour le lapin d'être touché par **exactement** 2 plombs.
$\mathbb{P}(X = 0)$, c'est La probabilité du lapin de ne pas être blessé.

Voici les "chances" du lapin pour différentes valeurs de p.

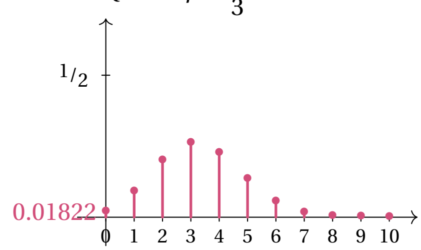
Quand $p = \dfrac{1}{20} = 0.05$



Quand $p = \dfrac{1}{10} = 0.1$



Quand $p = \dfrac{1}{3} = 0.33$



Exemple : Famille nombreuse.

En 1970, il y avait 53 680 familles de 8 enfants. Détaillons

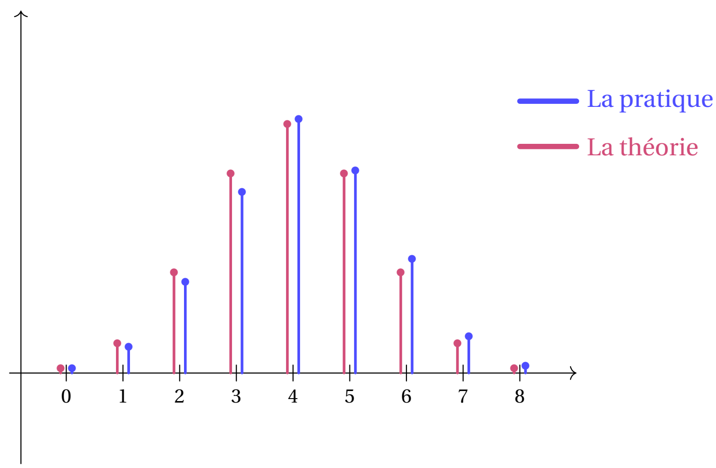
Il y a 215 familles qui ont 0 garçon
Il y a 1485 familles qui ont 1 garçon
Il y a 5331 familles qui ont 2 garçons
Il y a 10649 familles qui ont 3 garçons
Il y a 14959 familles qui ont 4 garçons
Il y a 11929 familles qui ont 5 garçons
Il y a 6678 familles qui ont 6 garçons
Il y a 2092 familles qui ont 7 garçons
Il y a 342 familles qui ont 8 garçons

On peut supposer que les naissances sont indépendants

donc la V.A. X donnant le nombre de garçon dans une fratrie suit la loi Binomiale de paramètres $(8, 0.5)$,

CàD une $X \sim \mathfrak{B}(8, 0.5)$

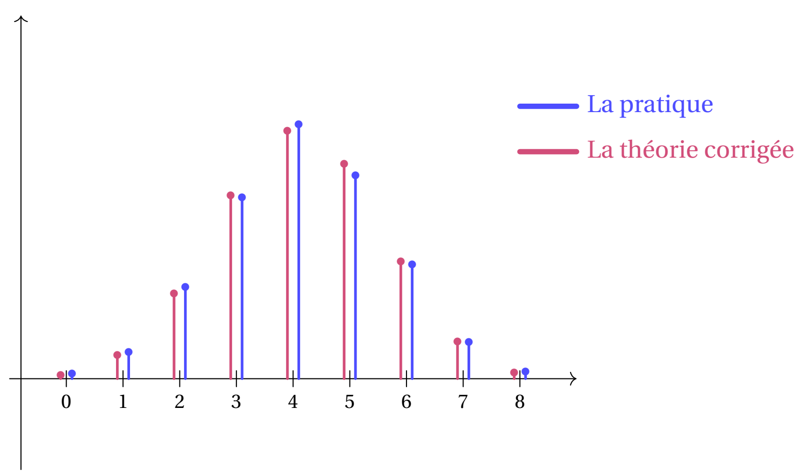
Comparons la théorie et la pratique



En fait les garçons sont fragiles, ils dépérissent et meurs vite (trop vite).
Pour compenser la perte, il nait environ 105 garçons pour 100 filles,

ainsi on a plutôt $X \sim \mathfrak{B}(8, 0.52)$.

On obtient ainsi une correspondance quasi parfaite entre théorie et pratique.



2 Image d'une V.A.

Définition 4. Image d'une V.A. par une fonction

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et X une v.a. numérique sur Ω.
On considère une fonction f de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
On suppose que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}$.

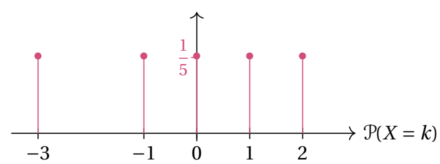
Alors $f \circ X$ est une V.A., qui est traditionnellement notée $f(X)$.

La loi de $f \circ X = f(X)$ est donnée par $\forall\, k,\ \mathcal{P}\Big(f(X) = k\Big) = \sum_{f(\alpha)=k} \mathcal{P}(X = \alpha)$

Exemple

Soit X une V.A. de loi uniforme sur $\{-3, -1, 0, 1, 2\}$,
CàD les valeurs de X sont -3,-1,0,1 ou 2
et chaque résultat est équiprobable

ainsi on a



On va déterminer la loi de $X^2 + 1$

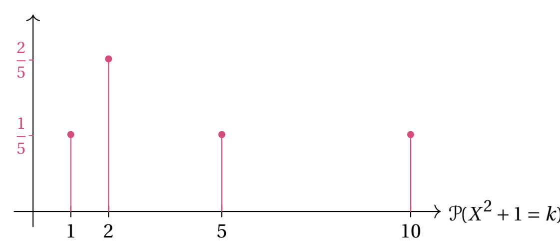
Pour k variant dans $\{-3, -1, 0, 1, 2\}$,
la fonction $X^2 + 1$ prend les valeurs $\{1, 2, 5, 10\}$

> $\mathcal{P}(X^2 + 1 = 1) = \mathcal{P}(X^2 = 0) = \mathcal{P}(X = 0) = {}^1/_5$

> $\mathcal{P}(X^2 + 1 = 2) = \mathcal{P}(X^2 = 1) =$
$= \mathcal{P}(X = 1 \ ou\ X = -1)$
$= \mathcal{P}(X = 1) + \mathcal{P}(X = -1)$
$= {}^1/_5 + {}^1/_5 = {}^2/_5$

> $\mathcal{P}(X^2 + 1 = 5) = \mathcal{P}(X^2 = 4) =$
$= \mathcal{P}(X = 2 \ ou\ X = -2)$
$= \mathcal{P}(X = 2) + \underbrace{\mathcal{P}(X = -2)}_{=0} = {}^1/_5$

ainsi on a



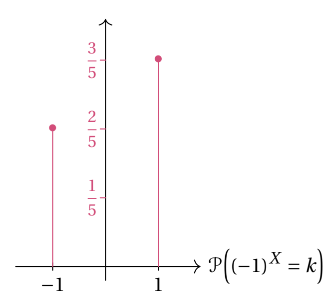
On va déterminer la loi de $(-1)^X$

Pour k variant dans $\{-3, -1, 0, 1, 2\}$,
la fonction $(-1)^X$ prend les valeurs $\{-1, 1\}$

> $\mathcal{P}\Big((-1)^X = 1\Big) = \mathcal{P}(X = pair)$
$= \mathcal{P}(X = 0 \ ou\ X = 2) = {}^2/_5$

> $\mathcal{P}\Big((-1)^X = -1\Big) = \mathcal{P}(X = impair)$
$= \mathcal{P}(X = -3 \ ou\ X = -1 \ ou\ X = 1) = {}^3/_5$

ainsi on a

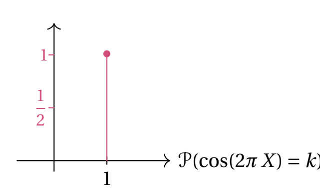


On va déterminer la loi de $\cos(2\pi X)$

Pour k variant dans $\{-3, -1, 0, 1, 2\}$,
la fonction $\cos(2\pi X)$ prend l'unique valeur $\{1\}$

> $\mathcal{P}(\cos(2\pi X = 1) = 1$

ainsi on a



3 Couples de variables aléatoires.

On considère deux variables aléatoires X, Y numérique sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

Comme X et Y sont des fonctions de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, En théorie, on sais calculer $X(\omega)$ et $Y(\omega)$.
Donc il est facile de définir et de manipuler les fonctions $X+Y$, $aX+bY$, $X.Y$, X^Y, en effet on a

$$[aX+bY](\omega) = aX(\omega) + bY(\omega)$$

$$[X.Y](\omega) = X(\omega)\, Y(\omega)$$

$$\left[X^Y\right](\omega) = (\, X(\omega)\,)^{Y(\omega)}$$

Attention : avec les lois, il est bien plus difficile de manipuler $X+Y$ ou XY.

Définition 5.
On considère deux variables aléatoires X, Y numérique sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

> La V.A. (X, Y) est définie par

$$(X,Y)(\omega) = (\, X(\omega), Y(\omega)\,)$$

Donc (X, Y) est une fonction de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

> Loi conjointe du couple (X, Y). On suppose que $X(\Omega)) = \{0,1,...,n\}$ et $Y(\Omega)) = \{0,1,...,p\}$.

La loi conjointe du couple (X, Y) :

c'est le tableau des (p_{ij}) avec $p_{ij} = \mathbb{P}\Big([X=i]\ et\ [Y=j]\Big)$ où $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$

X= \ Y=	$Y=y_1$	$Y=y_2$	$\cdots$	$Y=y_p$	
$X=x_1$	p_{11}	p_{12}		p_{1p}	$\leftarrow \mathcal{P}(X=x_1)$
$X=x_2$	p_{21}	p_{22}		p_{2p}	$\leftarrow \mathcal{P}(X=x_2)$
$\vdots$					
$X=x_n$	p_{n1}	$\mathbb{P}([X=x_n]\ et\ [Y=y_2])$		p_{np}	$\leftarrow \mathcal{P}(X=x_n)$
	$\uparrow$ $\mathcal{P}(Y=y_1)$	$\uparrow$ $\mathcal{P}(Y=y_2)$		$\uparrow$ $\mathcal{P}(Y=y_p)$	

Remarques :

> En général les v.a. ne sont pas indépendantes
donc $\mathbb{P}\left([X=i]\ et\ [Y=j]\right) \neq \mathbb{P}([X=i])\,\mathbb{P}([Y=j])$

> Comme $p_{ij} = \mathbb{P}(\square)$ donc on a $p_{ij} \in [0,1]$.

> On a : $p_{12} = 0 \iff \mathbb{P}\Big([X=1]\ et\ [Y=2]\Big) = 0$
$\iff$ les évènements $[X=1]\ et\ [Y=2]$ sont incompatibles.

Cohérence : Quand on somme tous les coefficients du tableau, on trouve 1.

Définition 6.
On considère deux variables aléatoires X, Y numérique sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

> On dit que X et Y est indépendantes
Ssi $\forall\ x \in X(\Omega)$ et $\forall\ y \in Y(\Omega)$ les évènements $[X = i]$ et $\left[Y = j\right]$ sont indépendants

$$\text{On a alors } p_{ij} = \mathbb{P}\Big([X = i]\, et\, [Y = j]\Big) = \mathbb{P}\Big([X = i]\Big).\mathbb{P}\Big([Y = j]\Big)$$

> La définition se généralise à 3 (ou plus) v.a.
On dit que les v.a. sont **mutuellement** indépendantes
Ssi elles sont 2 à 2 indépendantes et en plus

$$\mathbb{P}\Big([X = i]\ et\ \left[Y = j\right]\ et\ [Z = k]\Big) = \mathbb{P}\Big([X = i]\Big).\mathbb{P}\Big(\left[Y = j\right]\Big).\mathbb{P}\Big([Z = k]\Big)$$

Attention : mutuellement indépendantes $\Longrightarrow$ 2 à 2 indépendantes mais la réciproque est fausse.

Théorème 7. Formulaire sur l'indépendance

1. Lorsque X, Y sont des V.A. indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
2. Lorsque X, Y, Z, T sont des V.A. mutuellement indépendantes
alors $(aX + bY)$ et $Z.T$ sont indépendantes. (Lemme des coalitions)
3. Tout n'est pas rose.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On pose Z = XY.
Alors X, Y, Z sont deux à deux indépendantes mais pas mutuellement indépendantes.

Exemples

Soit X une V.A. de loi uniforme sur $\{1,2,3\}$,

Comme X est la loi uniforme, on sait que : $\mathcal{P}(X=1)=\mathcal{P}(X=2)=\mathcal{P}(X=3)={}^1/_3$

La loi conjointe de (X,X), c'est

X= \ X=	X=1	X=2	X=3	
X=1	$^1/_3$	0	0	$\leftarrow \mathcal{P}(X=1)={}^1/_3$
X=2	0	$^1/_3$	0	$\leftarrow \mathcal{P}(X=2)={}^1/_3$
X=3	0	0	$^1/_3$	$\leftarrow \mathcal{P}(X=3)={}^1/_3$
	$\uparrow$ $\mathcal{P}(X=1)={}^1/_3$	$\uparrow$ $\mathcal{P}(X=2)={}^1/_3$	$\uparrow$ $\mathcal{P}(X=3)={}^1/_3$	

En effet

$p_{11}=\mathcal{P}([X=1]\ et\ [X=1])=\mathcal{P}([X=1])={}^1/_3$

$p_{12}=\mathcal{P}([X=1]\ et\ [X=2])=0$

Les V.A. X et X ne sont pas indépendantes!!!! on s'en doutait.

Une urne contient 4 boules numérotés 1,2,3,3. On tire 2 boules successivement sans remise.

Soit X la V.A. donnant la valeur de la première boule.

On a facilement $\mathcal{P}(X=1)=\mathcal{P}(X=2)={}^1/_4$ et $\mathcal{P}(X=3)={}^1/_2$

Soit Y la V.A. donnant la valeur de la deuxième boule

La loi conjointe de (X,Y) se calcule facilement avec un arbre et on trouve

X= \ Y=	Y=1	Y=2	Y=3	
X=1	0	$^1/_{12}$	$^1/_6$	$\leftarrow \mathcal{P}(X=1)={}^1/_4$
X=2	$^1/_{12}$	0	$^1/_6$	$\leftarrow \mathcal{P}(X=2)={}^1/_4$
X=3	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$\leftarrow \mathcal{P}(X=3)={}^1/_2$
	$\uparrow$ $\mathcal{P}(Y=1)$ $={}^1/_6+{}^1/_{12}={}^1/_4$	$\uparrow$ $\mathcal{P}(Y=2)$ $={}^1/_6+{}^1/_{12}={}^1/_4$	$\uparrow$ $\mathcal{P}(Y=3)$ $={}^1/_6+{}^1/_6+{}^1/_6={}^1/_2$	

> Les V.A. X et Y ne sont pas indépendantes!!!! on s'en doutait, clairement Y dépend de X.

> Elles suivent la même loi. C'est plus étonnant!!

Une urne contient 4 boules numérotés 1,2,3,3. On tire 2 boules simultanément.

Soit S_{mall} la plus petite des deux boules et G_{reat} la plus grande

La loi conjointe de (X,Y) se calcule à partir de la loi conjointe précédente, on trouve

S= \ G=	G=1	G=2	G=3	
S=1	0	$^1/_6$	$^1/_3$	$\leftarrow \mathcal{P}(S=1)={}^1/_6+{}^1/_3={}^1/_2$
S=2	0	0	$^1/_3$	$\leftarrow \mathcal{P}(S=2)={}^1/_3$
S=3	0	0	$^1/_6$	$\leftarrow \mathcal{P}(S=3)={}^1/_6$
	$\uparrow$ $\mathcal{P}(G=1)$ $=0$	$\uparrow$ $\mathcal{P}(G=2)$ $^1/_6$	$\uparrow$ $\mathcal{P}(G=3)$ $={}^1/_3+{}^1/_3+{}^1/_6={}^5/_6$	

4 Somme de Bernoulli indépendante.

Définition 8. Somme de Bernoulli

Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $X_1, \dots, X_n$ des V.A. de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p

On considère la V.A. $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Interprétation :

> On dispose d'une expérience dont la probabilité de succès est p.

> On répète n fois, indépendamment cette expérience
et la V.A. X_i modélise le succès ou l'échec de la i-ème expérience.

> La V.A. $S = X_1 + \dots + X_n$ compte le nombre de succès lorsque l'on répète n fois et indépendantes de l'expérience.

Conclusion : $S = X_1 + \dots + X_n \sim \mathscr{B}(n,p)$

Théorème 9. Loi binomiale ET Bernoulli indépendantes

Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $X_1, \dots, X_n$ des V.A. de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p

On a alors $S = X_1 + \dots + X_n \sim \mathscr{B}(n,p)$, CàD la V.A. S suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$

$$\text{Ainsi} \quad \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = k) = \binom{n}{k} p^k \overline{p}^{n-k} \qquad \text{avec } \overline{p} = 1-p$$

5 Série génératrice d'une V.A.

Définition 10.

On suppose que X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On appelle série génératrice de la V.A. X, la fonction

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)\, t^k$$

Théorème 11. Propriétés de la fonction G_X

> La fonction G_X est définie sur $[0,1]$ et $G_X(1) = 1$.

> Lorsque $X \sim \mathfrak{B}(p)$ ainsi $X(\Omega) = \{0,1\}$

$$\text{Alors } G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)\, t^k = \underbrace{\overline{p}}_{k=0} + \underbrace{p\,t}_{k=1} = \overline{p} + t\,p$$

> Lorsque X_1 et X_2 sont indépendantes alors $G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t).G_{X_2}(t)$
Application : Lorsque $X \sim \mathfrak{B}(n,p)$, alors $G_X(t) = \left(\overline{p} + t\,p\right)^n$

6 Exercices

Exercice 1. On lance n fois une pièce de monnaie.

1. Quelle est la probabilité que le premier pile arrive au n-ième lancer ?
2. Pour $k \in \{1, 2, ..., n\}$, quelle est la probabilité d'obtenir le k-ième pile au n-ème lancer ?

Exercice 2. [Correction] Soit $N \geqslant 2$. Un joueur jette une pièce équilibrée.
Soit X la variable aléatoire donnant le numéro du jet pour lequel on obtient pile pour la première fois.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $G_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(X = k)\, t^k$.

Exercice 3. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une urne contient n boules dont une seule boule blanche.
On effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Montrer que X suit une loi uniforme.

Exercice 4. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
n candidats passent un examen.
La probabilité de réussite pour chaque candidat est p.
En cas d'échec, le candidat repasse un examen de rattrapage avec la même probabilité de réussite p.

Quelle est la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves ?

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
n amis vont au cinéma et choisissent entre 3 films F_1, F_2 et F_3. Les choix sont indépendants et équilibrés entre les films.
Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note X_i le nombre de personnes choisissant le film F_i.

1. Déterminer la loi de X_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
2. Soit Y le nombre de films ayant reçu au moins un choix. Déterminer la loi de Y .

Exercice 6. Dans une famille, il y a n enfants avec $n \geqslant 2$. On considère les événements

A : La famille a des enfants des deux sexes.

B : La famille a au plus une fille.

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$
2. Quand a-t-on $P(A \cap B) = P(A).P(B)$?

Exercice 7. On a $r+1$ urnes : $U_0, ..., U_r$. Pour $i \in \{0, 1, ..., n\}$, l'urne U_i contient i boules noires et $r - i$ boules blanches.
On choisit une urne au hasard et l'on effectue n tirages successifs avec remise.
On note X est le nombre de boules noires tirées.

Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, on a $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{i}{n}\right)^k \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{n-k}$.

Exercice 8. Soit $N \geqslant 2$.
Une urne contient $N+1$ boules numérotées de 0 à N.
On tire avec remise une boule.
On considère les variables aléatoires suivantes :

$X_1 = 1$

Pour $i \geqslant 2$, $X_i = 1$ si le numéro tiré au tirage i n'est pas sorti dans les tirages précédents, $X_i = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi de X_i.
2. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes, pour $i \neq j$?

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{2^n}$
2. On a

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= \sum_{n \in X(\Omega)} \mathcal{P}(X = n)\, t^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, t^n - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \square^n - 1 \\
&= \frac{1}{1 - \square} - 1 = \frac{1}{1 - {}^t/_2} - 1
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Il est clair que $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$

On note A_k l'événement : "Obtenir la boule blanche au k-ième tirage". On a

$$\begin{aligned}
\forall k \in \{1, 2, .., n\},\ \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right) \\
&\quad \textit{Attention les événement sont dépendants} \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1}\ et\ \overline{A_2}}\left(\overline{A_3}\right) \ldots \times \mathbb{P}_{\overline{A_1}\ et \ldots et\ \overline{A_{k-1}}}(A_k) \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n-k} \times \frac{1}{n-(k-1)} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Donc la loi est bien uniforme

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

Pour 1 candidat

On note R_i l'événement "Le candidat a réussi l'examen au i-ème passage.

On a $\mathbb{P}(R_1) = p$ et $\mathbb{P}_{\overline{R_1}}(R_2) = p$, ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1 \sqcup \left[\overline{R_1} \cap R_2\right]) &= \mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(\overline{R_1} \cap R_2) \\
&= p + \mathbb{P}(\overline{R_1})\mathbb{P}_{\overline{R_1}}(R_2) \\
&= p + \overline{p}\, p \\
&= p + (1-p)p = 2p - p^2
\end{aligned}$$

Je note $\alpha = 2p - p^2$

Pour n candidat

Soit X la va donnant le nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves suit une loi binomiale

On a $X \sim \mathscr{B}(n, \alpha)$, ainsi

$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$ et $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\},\ \mathbb{P}(X) = \dbinom{n}{k} \alpha^k\, \overline{\alpha}^{n-k}$