Exercice 1. [Correction]

Problème 1.

Si A et U sont deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)
On dit que la matrice $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de la matrice A si les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{ll} (1) & AUA = A \\ (2) & UAU = U \\ (3) & UA = AU \end{array}$$

Le but de ce problème est de caractériser l'existence d'un pseudo-inverse pour une matrice carrée donnée, et d'obtenir une méthode de calcul lorsqu'il existe.

Partie I. Quelques situations plus ou moins simples.

1. Soit A une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que A^{-1} est un pseudo-inverse de la matrice A.
   Justifier que A^{-1} est l'unique pseudo-inverse de la matrice A..
2. On sait que la matrice nulle n'est pas inversible
   Montrer que $\mathscr{O}$ est l'unique pseudo-inverse de $\mathscr{O}$ la matrice nulle.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que A admet un pseudo-inverse que l'on note U. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $A' = P^{-1}AP$ admet un pseudo-inverse que l'on exprimera en fonction de U.
4. On suppose que D est une matrice diagonale.
   Montrer que D est un pseudo-inverse que l'on explicitera.
5. On suppose que N est une matrice nilpotente et que U est un pseudo inverse de N.
   Donner la définition de N est une matrice nilpotente.
   Donner la définition p l'indice de nilpotente de la matrice N.
   En utilisant p, trouver une absurdité.
   Que peut-on conclure ?

Partie II. Étude d'un exemple.

Dans cette partie, $n = 3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Rappeler la définition de f. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
2. Déterminer une base et la dimension de $\ker f$.
3. Justifier que $\big(f_1 = (0,1,2),\ f_2 = (1,2,3)\big)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Démontrer que les ssev $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires.
5. On pose $f_1 = (0,1,2)$, $f_2 = (1,2,3)$, $f_3 = (1,-1,1)$ et on note $\mathscr{C}$ la famille $\big(f_1, f_2, f_3\big)$.
   Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et Déterminer A', la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$.

   On trouvera une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et l'on posera* $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

6. On note Justifier que A_1 est inversible et calculer son inverse noté $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$

   Montrer que la matrice $U' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & 0 \\ \gamma' & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un pseudo-inverse de la matrice A'.
7. Déterminer alors un pseudo inverse U de la matrice A que l'on exprimera en fonction de matrices définies auparavant dans cette partie.

Partie III. Unicité du pseudo-inverse.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geqslant 1$. on suppose que A admet deux pseudo-inverses U et U'.

1. En calculant le produit $AUAU'$ de deux manières différentes, montrer : $UA = AU'$.
2. En déduire que $U = U'$.

On a ainsi prouvé que le pseudo-inverse est unique. On pourra donc parler du pseudo-inverse.

Partie IV. Condition d'existence du pseudo-inverse.

Dans cette partie, A désigne un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$),
et f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Dans cette question, on suppose que A admet un pseudo-inverse U, ainsi on a :
$$\begin{array}{ll} (1) & AUA = A \\ (2) & UAU = U \\ (3) & UA = AU \end{array}$$
   et l'on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice U.
   (a) Montrer que : $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{O}\right\}$
   (b) En déduire que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.
2. Dans cette question, on suppose que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$
   et que ni $\ker(f)$ ni $\mathrm{Im}(f)$ n'est réduit au vecteur nul.
   Les deux situations particulières $\ker(f) = \{O\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \{O\}$ ont été traitées dans la parties I.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im} f$ est stable par f
   et que f^* la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ est un automorphisme
   Rappel : f^* la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$, c'est la fonction $f^* : \mathrm{Im} f \longrightarrow \mathrm{Im} f$
   $e \longmapsto f^*(e) = f(e)$
   (b) Montrer l'existence d'une base $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et un entier $r \in \{1, 2, .., n-1\}$ tels que la matrice A' de f dans la base $\mathscr{C}$ soit de la forme
$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
   la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} \end{pmatrix}$ étant elle même inversible.
   (c) Démontrer que la matrice A' admet un pseudo-inverse que l'on explicitera à l'aide de A_1.
   (d) Montrer finalement que la matrice A admet un pseudo-inverse.
3. Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que A admette un pseudo-inverse.

Partie I. Quelques situations plus ou moins simples.

1. Soit A une matrice inversible . Justifier que A^{-1} est l'unique pseudo-inverse de la matrice A.

   La matrice A^{-1} vérifie les relation (1), (2) et (3). Évident.

   Unicité. On a suppose que B est un autre pseudo

   Ainsi $ABA = A$. On multiplie par A^{-1} à gauche et à droite donc $B = A^{-1}$

   Conclusion : A^{-1} est l'unique pseudo-inverse de la matrice A.

2. Montrer que $\mathscr{O}$ est l'unique pseudo-inverse de $\mathscr{O}$ la matrice nulle.

   La matrice $\mathscr{O}$ vérifie les relation (1), (2) et (3). Évident. donc $\mathscr{O}$ est un pseudo de $\mathscr{O}$

   Unicité. On a suppose que B est un autre pseudo de $\mathscr{O}$

   Ainsi $B = \mathscr{O}B\mathscr{O} = \mathscr{O}$.

   Conclusion : $\mathscr{O}$ est l'unique pseudo-inverse de la matrice $\mathscr{O}$.

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que A admet un pseudo-inverse que l'on note U. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A' = P^{-1}AP$ admet un pseudo-inverse que l'on exprimera en fonction de U.

   Je considère $U' = P^{-1}UP$

   La matrice U' vérifie les relation (1), (2) et (3). Évident.

   Conclusion : $U' = P^{-1}UP$ est un pseudo de $A' = P^{-1}AP$

4. On suppose que D est une matrice diagonale. Montrer que D est un pseudo-inverse que l'on explicitera.

   Comme D est diagonale on a $D = Diag(a_1, ..., a_n)$

   Je considère $D' = Diag(b_1, ..., b_n)$ avec Si $a_i = 0$ alors $b_i = a_i = 0$ et Si $a_i \neq 0$ alors $b_i = \dfrac{1}{a_i}$

   La matrice D' vérifie les relation (1), (2) et (3). Évident.

   Conclusion : D' est un pseudo de D

5. On suppose que N est une matrice nilpotente et que U est un pseudo inverse de N.

   On note p l'indice de nilpotence.

   On a $NUN = N$ donc $UN^2 = N$. On multiplie par N^{p-2}

   Ainsi $N^{p-1} = UN^p = U\mathscr{O} = \mathscr{O}$ OUPS.

Partie III. Unicité du pseudo-inverse.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geqslant 1$. on suppose que A admet deux pseudo-inverses U et U'.

1. En calculant le produit $AUAU'$ de deux manières différentes, montrer : $UA = AU'$.

   D'une part : $\underbrace{AUA}U' = AU'$

   D'autre part : $AUAU' = Ca\ commute = UAU'A = U\underbrace{AU'A} = UA$

   Conclusion : $UA = AU'$.

2. En déduire que $U = U'$.

   On a

$$U = U\underbrace{AU} = UAU' = \underbrace{UA}U' = AU'U' = U'AU' = U'$$

On a ainsi prouvé que le pseudo-inverse est unique. On pourra donc parler du pseudo-inverse.

Partie IV. Condition d'existence du pseudo-inverse.

1. Dans cette question, on suppose que A admet un pseudo-inverse U et l'on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice U.

   (a) Montrer que : $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{O}\right\}$

   Soit $e \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ ainsi $f(e) = O$ et $e = f(a)$

   Comme $AUA = A$ et $AU = UA$, on a $UA^2 = A$, CàD $g \circ f \circ f = f$

   J'applique avec a ainsi $e = f(a) = g \circ f \circ f(a) = g \circ f(e) = g(O) = O$

   Conclusion : $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{O}\right\}$

   (b) En déduire que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.

   Avec Grassmann, on a $\dim\Big(\ker(f) + \mathrm{Im}(f)\Big) = \dim\Big(\ker(f)\Big) + \dim\Big(\mathrm{Im}(f)\Big) - \dim\Big(\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)\Big)$

   Donc avec en plus le théorème du rang, on a $\dim\Big(\ker(f) + \mathrm{Im}(f)\Big) = \dim(E)$

   Conclusion : $ker(f) + \mathrm{Im}(f)$ est un ssev de dimension Top donc $ker(f) + \mathrm{Im}(f) = E$

   Comme $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{O}\right\}$ et $ker(f) + \mathrm{Im}(f) = E$, on a $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires

2. Dans cette question, on suppose que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$ et que ni $\ker(f)$ ni $\mathrm{Im}(f)$ n'est réduit au vecteur nul.

   Les deux situations particulières $\ker(f) = \{O\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \{O\}$ ont été traitées dans la parties I.

   (a) Montrer que $\mathrm{Im} f$ est stable par f

   "Evident"

   et que f^* la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ est un automorphisme

   On a $e \in \ker f^*$ Ssi $e \in \mathscr{D}_{épart} = \mathrm{Im}(f)$ et $f^*(e) = f(e) = O$

   Conclusion : $e \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ donc $e = O$

   Ainsi f^* est injective et avec le thm du rang elle est surjective. Fini

   (b) Avec les décorations, on a

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   De plus $\mathscr{M}at(f^*) = A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} \end{pmatrix}$

   Comme f^* est bijective, on a sait que A_1 est inversible.

   (c) Démontrer que la matrice A' admet un pseudo-inverse que l'on explicitera à l'aide de A_1.

   La matrice $\begin{pmatrix} A_1^{-1} & \mathscr{O} \\ \mathscr{O} & \mathscr{O} \end{pmatrix}$ convient.

   (d) Montrer finalement que la matrice A admet un pseudo-inverse.

   On utilise QI.3.

3. Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que A admette un pseudo-inverse.