Coté recto.

Exercice 1. Soit F la fonction définie par l'expression $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln\left(1+t^2\right)}$

1. Étude de F.
   (a) Justifier que la fonction F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$
   (b) Étudier la parité de la fonction F.
   (c) Résoudre, sur $]0,+\infty[$, l'inégalité $\dfrac{\left(1+x^2\right)^2}{1+4x^2} \geqslant 1$.
   (d) Calculer F' sur $]0,+\infty[$
   et en déduire les variation de F.
2. Étude en 0^+.
   (a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall\, x \in \left]0,\eta\right]$, $\dfrac{1}{\ln\left(1+t^2\right)} \geqslant \dfrac{1}{2\ t^2}$
   (b) Déterminer la limite de $F(x)$ quand $x \to 0^+$.
3. Étude en $+\infty$.
   (a) Montrer qu'il existe A tel que $\forall\, x \in [A,+\infty[$, $\dfrac{1}{\ln\left(1+t^2\right)} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$
   (b) Déterminer la limite de $F(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 2. [Correction]

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que le nombre R_n existe, est positif et que la suite (R_n) est décroissante.
   Que peut-on déduire ?
   (b) Avec le théorème d'encadrement, montrer que $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   (c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{2t^{n+2}}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt$
   (d) En déduire que : $R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
   (a) Convergence de la suite (u_n).
      i. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes
      ii. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$.
   (b) En calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1 (-1)^k x^{2k}\,dx\right)$, montrer que $u_n = I + (-1)^{n+2} R_{2n+2}$.
   (c) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\pi}{4}$.
4. Faites la synthèse de la méthode proposée. Donner sans détailler les calculs la valeur (sous forme d'intégrale) des sommes suivantes.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Coté verso.

Exercice 3. [Correction]

Partie I : L'égalité de Taylor-Lagrange d'ordre n.

Soient $a<b$ deux réels, soit $n\in\mathbf{N}$, et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$.
On souhaite prouver qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Ce résultat est appelé l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n, appliquée à f entre a et b.

1. Quel résultat classique retrouve-t-on lorsque $n=0$?

   Pour $A\in\mathbb{R}$, et $t\in[a,b]$, on pose $\varphi_A(t)=f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-t)^k}{k!}f^{(k)}(t)-A\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$.

2. Justifier qu'on peut choisir A tel que $\varphi_A(a)=\varphi_A(b)$.

   Dans la suite de la question, on suppose que A vérifie cette condition.

3. Justifier que f est dérivable sur $[a,b]$ et calculer φ'_A

   En déduire l'égalité de Taylor-Lagrange.

Partie II. Application : la série harmonique alternée.

1. Justifier que la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.

   Le but est maintenant de déterminer sa limite.

   On note f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $\forall x>-1, f(x)=\ln(1+x)$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, déterminer $f^{(n)}$.

3. Montrer que : $\forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \exists c\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln(1+x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$.

4. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,1], \left|\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right|\leqslant\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

5. Retrouver alors le fait que la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et déterminer sa limite.

Partie III. Application : la nombre e.

1. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x>0$, et tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$0<e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}<\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x.$$

2. On suppose par l'absurde que $e\in\mathbb{Q}$, ainsi $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tels que $e=\dfrac{p}{q}$.

   Prouver qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $n!\left(\dfrac{p}{q}-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)\in\mathbb{N}^*$.

   En utilisant la question précédente, aboutir à une contradiction.

   Conclusion : $e\notin\mathbb{Q}$, CàD e est un nombre irrationnel.

On souhaite désormais prouver que e n'est pas algébrique de degré 2,
CàD n'est pas solution d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3, a\neq 0$ tels que $ae^2+be+c=0$.
On considère la fonction f définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=ae^x+ce^{-x}$.

3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\exists x_n\in\,]0,1[$, $\dfrac{f^{(n)}(x_n)}{n}=(n-1)!f(1)-\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{k!}f^{(k)}(0)$.

   On pose alors $u_n=\dfrac{f^{(n)}(x_n)}{n}$.

4. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, déterminer la fonction $f^{(k)}$.

   En déduire que $u_n\in\mathbb{Z}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

5. En déduire qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$, $u_n=0$

   puis en déduire que $a=b=c=0$, et conclure.

Plus généralement, Charles HERMITE a prouvé en 1873 que e n'est racine d'aucun polynôme (de quelque degré que ce soit) à coefficients entiers (et non nul).

On dit que e est un nombre transcendant.

Il est difficile de justifier que des nombres sont transcendants.

Le premier nombre transcendants explicite à été découvert par Liouville en 1844, c'est $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{10^{n!}}$

π et e sont les nombres transcendants les plus célèbres.

Partie IV. La première inégalité de Kolmogorov

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.

On suppose que f et f'' sont bornées, et on note $M_0=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|$ et $M_2=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|f''(t)|$.

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h>0$.

1. *Justifier que $\left|f(x+h)-f(x)-hf'(x)\right|\leqslant\dfrac{h^2M_2}{2}$.*

   On fabrique une inégalité similaire avec $f(x-h)$

2. *En déduire que : $\left|f'(x)\right|\leqslant\dfrac{M_0}{h}+h\dfrac{M_2}{2}$.*

3. *Montrer que f' est bornée et que si on note $M_1=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|f'(t)\right|$, alors $M_1\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$.*

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$.

   On a $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \left[Arctan(t)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

2. Étude de R_n.

   (a) Il y a 3 points à faire.

   > On intègre une fonction continue sur le segment $[0,1]$ donc R_n existe

   > On a $\mathbb{R}_n = \int_0^1 \underbrace{\frac{t^n}{t^2+1}}_{\geqslant 0 \ sur\ [0,1]} dt \geqslant 0$

   > On a $R_{n+1} - R_n = \cdots = \int_0^1 \underbrace{\frac{t^n(t-1)}{t^2+1}}_{\leqslant 0 \ sur\ [0,1]} dt \leqslant 0$

   (b) On a

   > $\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant \frac{t^n}{t^2+1} \leqslant \frac{t^n}{0+1}$

   > On intègre sur $[0,1]$, ainsi $0 \leqslant R_n \leqslant \underbrace{\int_0^1 x^n dt}_{=1/n+1}$

   Le théorème des gendarmes conclut

   (c) On fait une IPP

   (d) On démontre que $\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{2t^{n+2}}{(t^2+1)^2} dt = o\left(\frac{1}{n+1}\right)$

   On considère le Quotient $Q_n = \frac{\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{2t^{n+2}}{(t^2+1)^2} dt}{\frac{1}{n+1}} = \int_0^1 \frac{2t^{n+2}}{(t^2+1)^2} dt$

   On démontre que avec les gendarmes comme à la question Q1.b que $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Fini.

   En déduire que : $R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

   On a $\mathbb{R}_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{2t^{n+2}}{(t^2+1)^2} dt \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{2(n+1)}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2(n+1)}$

   ET $\frac{1}{2(n+1)} \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{2n[1+o(1)]} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

   Conclusion : $R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   (a) Etude de $(u_\square)$

   i. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes

   Facile.

   ii. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

   Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes donc elles convergent vers le même ℓ et on a de plus

   $$\underbrace{u_1}_{=\frac{2}{3}} \leqslant u_3 \leqslant \ldots \leqslant \ell \leqslant \ldots \leqslant u_2 \leqslant \underbrace{u_0}_{=1}$$

   Enfin comme les deux suites extraites contiennent tous les termes de la suite, elles convergent vers le même ℓ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

(b) En calculant $\sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1 (-1)^k x^{2k}\,dx\right)$, montrer que $u_n = I + (-1)^{n+2} R_{2n+2}$.

> D'une part.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\right] \mathrm{d}t &= \text{La somme est finie donc on peut intervertir}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t\right]\\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = u_n.\end{aligned}$$

> D'une part.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\right] \mathrm{d}t &= \text{c'est une suite géo de raison } \left(-t^2\right) \neq 1\\ &= \int_0^1 \frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1-(-t^2)}\,dt\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+2}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= I + (-1)^{n+2} R_{2n+2}\end{aligned}$$

(c) Comme $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} I = \frac{\pi}{4}$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Partie I : L'égalité de Taylor-Lagrange d'ordre n.

Soient $a<b$ deux réels, soit $n\in\mathbf{N}$, et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$.
On souhaite prouver qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Ce résultat est appelé l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n, appliquée à f entre a et b.

1. Quel résultat classique retrouve-t-on lorsque $n=0$?

   Facile c'est l'égalité des accroissements finis

2. Justifier qu'on peut choisir A tel que $\varphi_A(a)=\varphi_A(b)$.

   Facile

3. Justifier que f est dérivable sur $[a,b]$ et calculer φ'_A. En déduire l'égalité de Taylor-Lagrange.

   La fonction φ_A est dérivable sur $[a,b]$ et $\varphi_A(a)=\varphi_A(b)$

   Donc d'après Rolle, il existe $c\in]a,b[$ tel que $\varphi'_A(c)=0$

   De plus on a

$$\begin{aligned}\varphi'_A(t)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)+A\frac{(b-t)^n}{(n)!}\\ &\textit{Télescopage}\\ &=-\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+A\frac{(b-t)^n}{(n)!}\\ &=\frac{(b-t)^n}{n!}\left[A-f^{(n+1)}(t)\right]\end{aligned}$$

   Comme $\varphi'_A(c)=0$, on a $A-f^{(n+1)}(c)=0$, CàD $A=f^{(n+1)}(c)$ Fini

Partie II. Application : la série harmonique alternée.

1. Justifier que la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.

   Critère des séries alternées

   Le but est maintenant de déterminer sa limite.
   On note f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $\forall x>-1, f(x)=\ln(1+x)$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, déterminer $f^{(n)}$.

   On démontre par récurrence $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, x>-1,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1^{n-1})\,(n-1)!}{(1+x)^n}$

3. Montrer que : $\forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \exists c\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln(1+x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$.

   On applique la formule avec f sur $[0,1]$.

4. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in[0,1],\left|\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right|\leqslant\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

On a $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = \dfrac{(-1)^n}{n} \dfrac{1}{(1+c)^n}$, ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(-1)^n . n!}{(1+c)^n} \right|$$
$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \frac{1}{(1+c)^n}$$
$$\leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \frac{1}{(1+O)^n}$$
$$\leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

5. Retrouver alors le fait que la série $\sum_{k \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et déterminer sa limite.

   On applique avec $x = 1$ et on utilise le théorème de la distance.

   Conclusion : La série converge vers $\sum_{k \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ vers $\ln(2)$, CàD $\sum_{k \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$

Partie IV. La première inégalité de Kolmogorov

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
On suppose que f et f'' sont bornées, et on note $M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ et $M_2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$.

1. Justifier que $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \dfrac{h^2 M_2}{2}$.

   On applique l'égalité de Lagrange avec $b = x+h$ et $a = x$

   Ainsi on a $f(x+h) - f(x) - hf'(x) = f''(c) \dfrac{h^2}{2}$

   On met les Valeurs Absolue et majore $|f''(c)|$ par M_2

   On fabrique une inégalité similaire avec $f(x-h)$

2. En déduire que : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + h \dfrac{M_2}{2}$.

   On a $|hf'(x)| = |f(x+h) - f(x) - hf'(x) - (f(x+h) - f(x))|$
   $$\leqslant |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| + |f(x+h)| + |f(x)|$$
   $$\leqslant \frac{h^2 M_2}{2} + 2M_0$$
   $$\Longrightarrow |f'(x)| \leqslant \frac{2.M_0}{h} + h \frac{M_2}{2}$$

   C'est presque juste sauf que c'est pas bon.

   Pour avoir le bon résultat, il faut utiliser $f(x+h)$ et $f(x-h)$

   On a : $f(x+h) - f(x) - hf'(x) = f''(c) \dfrac{h^2}{2}$ et $f(x-h) - f(x) + hf'(x) = f''(d) \dfrac{h^2}{2}$

   On soustrait les deux ainsi
   $$f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x) = \left(f''(c) + f''(d)\right) \frac{h^2}{2}$$

   On reprend le calcul ci dessus et ça marche
   $$|2hf'(x)| = |f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x) - (f(x+h) - f(x-h))|$$
   $$\leqslant |f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| + |f(x+h)| + |f(x-h)|$$
   $$\leqslant \frac{2h^2 M_2}{2} + 2M_0$$
   $$\Longrightarrow |f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + h \frac{M_2}{2}$$

3. Montrer que f' est bornée et que si on note $M_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)|$, alors $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}$.

   On étudie la fonction $\varphi : h \longmapsto \dfrac{M_0}{h} + h \dfrac{M_2}{2}$