Exercice 1. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Voici un jeu organisé en 2 étapes.

> Étape 1. On joue à pile ou face avec un pièce équilibré au plus n fois. Le jeu s'arrête dès que l'on obtient pile ou bien quand on atteint le maximum des n lancers réglementaires

> Étape 2. On dispose d'une urne avec une boule Blanche. On ajoute dans cette urne autant de boule noire que l'on a obtenu de face dans l'étape 1. On tire une boule.

1. On considère l'évènement B_n : "À l'étape 2, j'ai tiré l'unique boule Blanche"
   (a) On suppose que $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Calculer la probabilité $a_{k,n}$ d'obtenir k face puis une fois pile à la première étape.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(B_n)$.
2. Limite quand $n \to \infty$.
   (a) Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.2^k} = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt$
   (b) En déduire que : $\mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$ Rq $\ln 2 \approx 0.69$

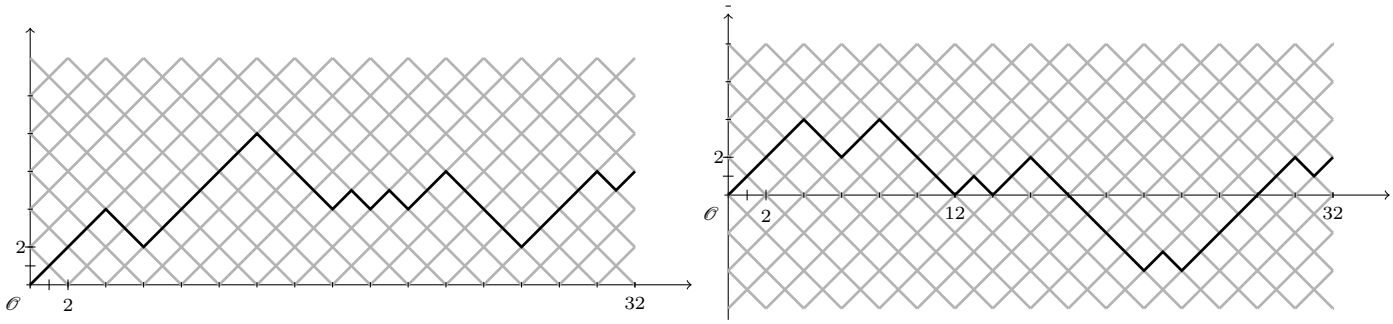
Exercice 2. [Correction]

Une valeureuse chenille se promène le long d'un grillage plan infini.

> Initialement la chenille est positionnée en $\mathscr{O} = (0, 0)$.

> Elle se déplace le long du grillage avec des déplacements up-droite $\nearrow$ ou low-droite $\searrow$ (voir dessin).

Some examples of slug-road.

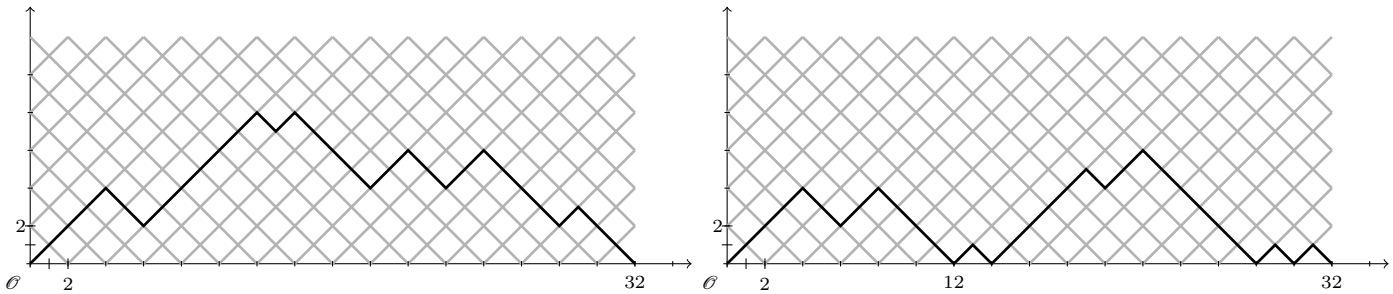


On appelle chemin de Dyck d'ordre n, un chemin qui vérifie en plus des conditions précédentes

> au bout de $2n$ déplacements, la chenille revient à l'origine, CàD le chemin aboutie au point $(2n, 0)$

> à tout instant, le chemin reste au dessus de l'axe des abscisses.

Exemples de chemin de Dyck d'ordre 16.



On note C_n le nombre de chemin de Dyck d'ordre n.

Le but de cet exercice est de calculer C_n.

On convient que $C_0 = 1$

1. Partie dénombrement. C'est la partie dénombrement donc c'est la partie difficile de l'exercice. L'autre partie est plus facile.
   (a) Calculer C_1 et C_2.
   (b) Rechercher d'une relation de récurrence.
      i. Montrer qu'il y a C_n chemin de Dyck d'ordre $n+1$ qui, à tout instant, reste strictement au dessus de l'axe des abscisses (Voir le premier exemple.)
      ii. Soit $k \in \{0, 1, 2, .., n-1\}$. Déterminer les nombres de chemins de Dyck d'ordre $n+1$ qui repasse par l'origine pour la première fois en $(2k+2, 0)$ (Voir l'exemple ci-dessus avec $k = 5$ et $n = 16$)
      iii. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k\, C_{n-k}$.

2. Dans la suite de l'exercice, on va étudier la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^n$

   > *On admet que la fonction f est définie sur $\mathscr{D} = \left[\dfrac{-1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$.*

   > *On admet (théorie de spé) que, sur $\mathscr{D}$, la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ et que $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^n\right] = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{d}{dx}\left[C_n\, x^n\right]$*

   > *On admet (théorie de spé) que, sur $\mathscr{D}$, les manipulations sur les sommes infinies sont les même que pour les sommes finies.*

   (a) Calculer le coefficient de x^n dans la forme développée de $f^2(x)$,

   CàD $f^2(x) = \left(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n\, x^n + \cdots\right).\left(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n\, x^n + \cdots\right)$

   $= \cdots + x^n \left[\ \textit{À calculer}\ \right] + \cdots$

   (b) En déduire que : $\forall\, x \in \mathscr{D},\ x f^2(x) = f(x) - 1$

   puis que : $\forall\, x \in \mathscr{D} - \{0\},\ f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$

   (c) Calculer à l'aide de factoriel,

   > Le produit des pairs de 1 à $2n$.

   > Le produit des impairs de 1 à $2n$.

   > On sait que la fonction $[x \longmapsto \sqrt{1+x}]$ admet un $DL_n(0)$ ainsi l'on peut écrire

   $$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k\, x^k + o(x^{n+1})$$

   Donner l'expression de α_{n+1} qui se trouve dans le cours

   > Montrer que : $\alpha_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \dfrac{1}{n+1} \dbinom{2n}{n}$

   > Déterminer le coefficient de x^n dans le $DL(0)$ de la fonction $\dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ en fonction de α_{n+1}

   Enfin : conclure que : $C_n = \dfrac{1}{n+1} \dbinom{2n}{n}$.

   (d) A l'aide la formule de Stirling, déterminer un équivalent simple de C_n.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On considère l'évènement B_n : "À l'étape 2, j'ai tiré l'unique boule Blanche"

   (a) Je note C_i l'événement : J'ai fait face au i-ième lancé. On a

$$\begin{aligned}\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}, \quad a_{k,n} &= \mathbb{P}\big(C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_k \cap \overline{C_{k+1}}\big) \\ &\text{Les lancers sont indépendants} \\ &= \mathbb{P}(C_1)\,\mathbb{P}(C_2)\cdots\mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}(\overline{C_{k+1}}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

   De plus $a_{n,n} = \mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n) = {}^1/_{2^n}$.

   (b) On note $\mathscr{A}_k$ l'événement : "J'ai k fois face puis pile", ainsi $\mathbb{P}(\mathscr{A}_k) = a_{k,n}$

   Il est clair que $\mathbb{P}_{\mathscr{A}_k}(B_n) = \dfrac{1}{k+1}$

   car lorsque l'événement $\mathscr{A}_k$ est réalisé, l'urne contient 1 boule blanche et k boules noires.

   On applique la formule des probabilité totale avec le système complet $(\mathscr{A}_0, ..., \mathscr{A}_n)$, ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathscr{A}_k)\mathbb{P}_{\mathscr{A}_k}(B_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{1}{k+1} + \underbrace{\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{n+1}}_{k=n} \\ &= \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{p} \frac{1}{p} + \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

2. Limite quand $n \to \infty$.

   (a) On fait par récurrence $H_{<n>}$: $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.2^k} = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt\right.$

   Initialisation n=1

   On a

$$\int_0^{1/2} \frac{t}{1-t}dt = \begin{cases} \text{On décompose en éléménets simples,....} \\ \text{OU bien} \\ \text{Astuce } \frac{t}{1-t} = \frac{t-1+1}{1-t} = -1 + \frac{1}{1-t} \end{cases}$$

   Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

$$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}\text{, CàD } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k.2^k} = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{t^{n+1}}{1-t}dt}$$

   Méthode classique :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k.2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.2^k} + \frac{1}{(n+1).2^{n+1}}$$ On applique $H_{<n>}$ puis final-Intermédiaire.

   Méthode Astucieuse.

$$\int_0^{1/2} \frac{t^{n+1}}{1-t}dt = \int_0^{1/2} \frac{t^n \times t}{1-t}dt = \int_0^{1/2} \frac{t^n(t-1+1)}{1-t}dt = \int_0^{1/2} t^n\,dt + \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

   (b) On commence par démontrer que avec les gendarmes que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   > Pour tout $t \in \left[0, {}^1/_2\right]$, on a

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-{}^1/_2} = 2\,t^n$$

   > On intègre l'inégalité sur $\left[0, {}^1/_2\right]$

   Ainsi $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt \leqslant 2\frac{1}{n+1}$

Conclusion : On a $\mathbb{P}(B_n) = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{1}{p} + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n+1}$

$$= \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On fait des dessins et on trouve $C_1 = 1$ et $C_2 = 2$.
2. Rechercher d'une relation de récurrence.
   (a) Pour fabriquer un chemin de Dyck d'ordre $n+1$ qui, à tout instant, reste strictement au dessus de l'axe des abscisses, il faut

   > Au début, on commence forcément par "monter", CàD passer de $(0,0)$ à $(1,1)$.
   il y a donc 1 possibilité.

   > A la fin, on finit forcément par "descendre", CàD passer de $(2n+1,1)$ à $(2n+2,0)$.
   il y a donc 1 possibilité.

   > Entre $(1,1)$ et $(2n+1,1)$, c'est un chemin de Dyck "normal" de longueur n
   il y a donc C_n possibilités

   Conclusion : il y a $1.1.C_n$ chemin de Dyck "strictement >0" d'ordre $n+1$

   (b) Soit $k \in \{0,1,2,..,n-1\}$.
   Pour fabriquer un chemins de Dyck d'ordre $n+1$ qui repasse par l'origine pour la première fois en $(2k+2,0)$, il faut

   > On commence par prendre un chemin de Dyck "strictement >0" entre $(0,0)$ et $(2k+2,0)$
   Le calcul précédent assure qu'il y a donc C_k possibilités.

   > Puis on prend un chemin de Dyck "normal" entre $(2k+2,0)$ et $(2n+2,0)$
   il y a donc C_{n-k} possibilités.

   Conclusion : il y a $C_k.C_{n-k}$ chemin de Dyck d'ordre $n+1$ qui repasse par l'origine pour la première fois en $(2k+2,0)$.

   (c) Pour les chemins de Dyck d'ordre $n+1$ on a

   > Soit chemin de Dyck d'ordre $n+1$ qui repasse par l'origine pour la première fois en $(2,0)$ (ici $k=0$).
   Il y a $C_0.C_{n-0}$ possibilités.

   > Soit chemin de Dyck d'ordre $n+1$ qui repasse par l'origine pour la première fois en $(4,0)$ (ici $k=1$)..
   Il y a $C_1.C_{n-1}$ possibilités.

   > Soit chemin de Dyck d'ordre $n+1$ qui repasse par l'origine pour la première fois en $(6,0)$ (ici $k=2$)..
   Il y a $C_2.C_{n-2}$ possibilités.

   > Etc .....

   Conclusion : On a donc $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k\, C_{n-k}$

3. On considère f la fonction définie sur $\mathscr{D} = \left]-\infty, \frac{1}{4}\right] - \{0\}$ par

$$\forall\, x \in \mathscr{D},\ f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

.

(a) Calculer à l'aide de factoriel,

> Le produit des pairs de 1 à $2n$ $= 2.4....(2n) = 2^n\, n!$.

> Le produit des impairs de 1 à $2n$.

On sait que : $\prod\limits_{pair}\prod\limits_{impair} = \prod\limits_{tous}$, ainsi

$$1.3....(2n-1) = \frac{\prod_{tous}}{\prod_{pair}} = \frac{1.2.3....(2n)}{2.4....(2n-1)(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}$$

> Le n-ième coefficient du DL en 0 de $\sqrt{1+x}$.

On sait que : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

Ainsi le coefficient α_{n+1} de x^{n+1} dans le DL de $\sqrt{1+x}$ est égale à

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)\left(\frac{1}{2}-n\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-(2n-3)}{2}\right)\left(\frac{-(2n-1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\left[1.3....(2n-3)(2n-1)\right]\\
&= \frac{(-1)^n}{(n+1)!\,2^{n+1}}\frac{(2n)!}{(n)!2^n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

> On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\\
&= \frac{1-\left[\sum_{k=0}^{n+1}\alpha_k\,(-4x)^k + o(x^{n+1})\right]}{2x}\\
&= -\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\alpha_k\,(-4)^k\,x^{k-1}}{2} + o(x^n)
\end{aligned}$$

Conclusion : $a_n = \dfrac{-(-4)^{n+1}\alpha_{n+1}}{2} = \dfrac{-(-1)^{n+1}(4)^{n+1}}{2}\,\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

(b) On sait que $x\,f^2(x) = f(x) - 1$

> $f(x) - 1 = \left[\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k + o(x^{n+1})\right] - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k x^k + o(x^{n+1}) = \cdots + a_{n+1}\,x^{n+1} + o(x^{n+1})$

> Et aussi

$$\begin{aligned} x\,f^2(x) &= x\left[\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k + o(x^{n+1})\right]^2 \\ &= x\left[.. + \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\,x^n + o(x^n)\right] = .. + \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\,x^{n+1} + o(x^{n+1}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

4. Conclusion

(a) On montre par une récurrence FORTE$H_{<n>}$: $C_n = a_n$.

(b) Après calcul, on trouve

$$C_n = a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!\,n!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}\frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi\,n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi\,n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}} = \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$$