Dispersion

1 Série génératrice d'une V.A. 1

2 Espérance d'une V.A. 2

3 Variance d'une V.A. 3

4 Espérance/variance et lois usuelles. 5

4.1 Espérance et variance des lois usuelles. 5

4.2 Espérance et variance et série génératrice. 5

4.3 V.A. centrée réduite. 5

5 Covariance de 2 V.A. 6

6 Dispersion. 7

6.1 Markov et Bienaimé-Chebychev. 7

6.2 Applications : Intervalle de confiance, Concentration. 8

7 Exercices 9

1 Série génératrice d'une V.A.

Définition 1.

On suppose que X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On appelle série génératrice de la V.A. X, la fonction

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\, t^k$$

Théorème 2. Propriétés de la fonction G_X

> Le nombre $G_X(t)$ est une série.

La fonction G_X est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et $G_X(1) = 1$

et $G'_X(t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\, t^k\right]' = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\left[t^k\right]' = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X = k)\, t^{k-1}$

> Lorsque la V.A. X est une Bernoulli, CàD $X \sim \mathfrak{B}(p)$

Alors $G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\, t^k = \underbrace{\overline{p}}_{k=0} + \underbrace{p\,t}_{k=1} = \overline{p} + t\,p$

> Lorsque la V.A. X est une binomiale, CàD $X \sim \mathfrak{B}(n,p)$

Alors $G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\, t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k \overline{p}^{n-k}\, t^k = Binôme = \left(\overline{p} + t\,p\right)^n$

> Lorsque la V.A. X est géométrique, CàD $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \overline{p}^{k-1}\, p$

Alors $G_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\, t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{p}^{k-1}\, p\, t^k = Somme\ Géo = \dfrac{p\,t}{1 - \overline{p}\,t}$

$$\boxed{\text{Lorsque } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes alors } G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t).G_{X_2}(t)}$$

2 Espérance d'une V.A.

Définition 3. Espérance

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et X une V.A. à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'espérance de la V.A. X est définie par la formule $E(X) \overset{def}{=} \sum \mathbb{P}(\omega).X(\omega)$.
Cependant cette définition n'est pas utilisable car $X(\omega)$ n'est pas calculable par contre on connait la loi de X.

L'espérance de la V.A. X, notée $E(X)$,

$$\text{Alors on a } E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k.\mathbb{P}(X = k)$$

Vocabulaire : Lorsque $E(X) = 0$, on dit que la V.A. X est centrée.

Théorème 4. Formulaire sur l'espérance

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et X, Y des V.A. à valeurs dans $\mathbb{R}$.

> **Formule générale du transfert.** Soit f une fonction

$$\text{Alors on a } E\Big(f(X)\Big) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)\, \mathbb{P}(X = k)$$

`Cette formule est très très importante et pas toujours évidente`

> $E\left(X^2\right) =$

> $E\left(t^X\right) =$

> $E\left(e^{iX}\right) =$

> **V.A. constante.** Si X est la V.A. constante égale à a alors $E(X) = a$

> **Linéarité.** L'espérance est linéaire, on a donc

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$
$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y)$$

> **Espérance et produit V.A.** On a

$$E(XY) = \sum k\ell \underbrace{\mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = \ell)}_{\text{Proba dans la loi conjointe}}$$

En général $E(X.Y) \neq E(X).E(Y)$. Mais

Lorsque X,Y sont des v.a **indépendantes** $\Longrightarrow E(X.Y) = E(X).E(Y)$

Attention : X n'est pas indépendant de X donc , $E(X^2) = E(X.X) \neq E(X)^2$.

> **Espérance et Fonction génératrice.** On suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$

On sait $G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\, t^k$, on a

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\,\mathbb{P}(X = k) = G'_X(1)$$

Démonstration : On a la formule $E(X) = \sum \mathbb{P}(\omega).X(\omega)$.
En effet par définition $X(\omega) \in X(\Omega)$ et l'évènement $X = k$ est la réunion disjointe de tous les singletons ω tel la $X(\omega) = k$.
les démonstrations sont maintenant quasi évidentes.

> Transfert

Par définition $E(f(X)) = \sum_{\text{tous les } \omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega).f(X(\omega))$. Puis on regroupe

> V.A. constante égale à a.

Ici $\forall\, \omega,\ X(\omega) = a$, ainsi $E(X) = \sum_{\text{tous les } \omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega).X(\omega) = \sum_{\text{tous les } \omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega).a = a\,1 = a$

> Linéarité.

On utilise $E(X) = \sum \mathbb{P}(\omega).X(\omega)$ ainsi que $[aX + b](\omega) = a\,X(\omega) + b$ et $[2X - 3Y](\omega) = 2\,X(\omega) - 3\,Y(\omega)$

> Produit.

On a

$$\begin{aligned}
E(X)\,E(Y) &= \left(\sum k\,\mathbb{P}(X = k)\right)\left(\sum \ell\,\mathbb{P}(Y = \ell)\right) \\
&\quad \textit{On regroupe les sommes en une somme double.} \\
&= \sum k\,\ell\,\mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = \ell) \\
&\quad \textit{les V.A. sont indépendantes ainsi} \\
&= \sum k\,\ell\,\mathbb{P}(X = k \textit{ et } Y = \ell) = E(X.Y)
\end{aligned}$$

3 Variance d'une V.A.

Théorème 5. Variance

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et X une V.A. à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Je note e l'espérance de X, ainsi $e = E(X)$ est un nombre dans $\mathbb{R}$

> **Def de la variance.** La variance de X, notée $V(X)$ est définie par

$$V(X) = E\left([X - e]^2\right)$$

> **L'indispensable Formule de Huygens.** On a

$$V(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = E\left(X^2\right) - e^2$$

Rappel : Avec la formule du transfert, on a : $E\left(X^2\right) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2.\mathbb{P}(X = k)$

Vocabulaire :
Le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est appelé l'écart type.
Si $V(X) = 1$, on dit que la V.A. X est réduite.

Démonstration : La démonstration est simple, il suffit de partir de la définition puis d'appliquer le formulaire de l'espérance.
On a

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left([X - e]^2\right) \\
&= E\left(X^2 - 2eX + e^2\right) \\
&\quad \text{On utilise le formulaire de l'espérance} \\
&\quad \text{Sachant que } e \text{ est un nombre} \\
&= E\left(X^2\right) - 2eE(X) + e^2 \\
&\quad \text{Or } E(X) = e \\
&= E\left(X^2\right) - 2e.e + e^2 = E\left(X^2\right) - e^2
\end{aligned}$$

Théorème 6. Formulaire sur la variance

On considère X une V.A.. à valeurs dans $\mathbb{R}$. on a l'indispensable formule de Huygens

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = E\left(X^2\right) - e^2$$

> **Positivité.** La variance est toujours positive, CàD $V(X) \geqslant 0$

> **Dispersion nulle.** La variance mesure la dispersion de la V.A. autour de e
CàD
> Lorsque X est la fonction constante égale à a alors $V(X) = 0$.
> Lorsque $V(X) = 0$ alors la V.A. X est constante égale à e presque surement.

> **Quadratique.** La variance est quadratique

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

> **Variance et somme.** En général $V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$
Mais lorsque X, Y sont des v.a indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Attention : X n'est pas indépendant de X donc $V(2X) \neq V(X) + V(X)$.
En effet $V(2X) = V(aX) = a^2 V(X) = 4V(X) \neq V(X) + V(X)$

Démonstration : Pour les démonstrations, on utilisera soit la def soit la formule du transfert.

> Positivité ?

Évident avec la définition et la formule du transfert

$$V(X) = E\left((X-e)^2\right) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k-e)^2 \mathbb{P}(X=k) \geqslant 0$$

> Dispersion ?

- Si X est constante égale à a alors $e = E(X) = a$ et $X - e$ est la fonction nulle et donc $V(X) = E\left((X-e)^2\right) = 0$

- Si $V(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k-e)^2 \mathbb{P}(X=k) = 0$. C'est une somme nulle de terme positif donc $\forall k,\ (k-e)^2 \mathbb{P}(X=k) = 0$
Si $k \neq e$ alors $\mathbb{P}(X=k) = 0$ et donc $X = k$ est impossible

Conclusion : La seule valeur de X, c'est e.

> Quadratique ?

Je note $X' = aX + b$ et $e = E(X)$
A cause des propriétés de l'espérance, on sait que $E(X') = aE(X) + b = ae + b$
Maintenant on calcule $V(X') = E(X'^2) - \left(E(X')\right)^2 = E'((aX+b)^2) - (ae+b)^2$
On poursuit le calcul comme pour la démonstration de la Formule de Huygens et on obtient

$$V(X') = \ldots.. = a^2\left(E(X^2) - e^2\right) = a^2 V(X)$$

> Somme ?

On utilise $V(X+Y) = E\left([X+Y]^2\right) - E(X+Y)^2$

> Je note $a = E(X)$ et $b = E(Y)$.

> Comme l'espérance se distribue, on a : $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = a + b$, ainsi on a

On a $V(X+Y) = E\left([X+Y]^2\right) - (a+b)^2$

$$= E\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) - \left(a^2 + 2ab + b^2\right)$$

On distribue l'espérence.

$$= E\left(X^2\right) + 2E(XY) + E\left(Y^2\right) - \left(a^2 + 2ab + b^2\right)$$

Comme X et Y sont indépendantes, on a $E(XY) = E(X).E(Y) = ab$

$$= E\left(X^2\right) + 2ab + E\left(Y^2\right) - a^2 - 2ab - b^2$$

$$= \underbrace{E\left(X^2\right) - a^2}_{=V(X)} + \underbrace{E\left(Y^2\right) - b^2}_{=V(Y)} = V(X) + V(Y)$$

4 Espérance/variance et lois usuelles.

4.1 Espérance et variance des lois usuelles.

Théorème 7. Espérance et variance des lois usuelles

Loi uniforme.

Soit X est une V.A. uniforme de support $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$,

ainsi $\forall\, k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathbb{P}(X = x_k) = {}^1/_n$

On a alors $E(X) = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} =$ la moyenne

Loi de Bernoulli.

Soit X une V.A. On suppose $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, CàD X suit une loi de Bernoulli de paramètre p

ainsi $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = \overline{p}$

On a alors $E(X) = p$ et $V(X) = p\,\overline{p}$

Loi de Binomiale.

Soit X une V.A. On suppose $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, CàD X suit une loi binomiale d'ordre n de para p

ainsi $\forall\, k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k \overline{p}^{n-p}$

On a alors $E(X) = n.p$ et $V(X) = n.p\,\overline{p}$

4.2 Espérance et variance et série génératrice.

Théorème 8.

Soit X une V.A. à valeur dans $\mathbb{N}$ et G_X sa série génératrice

On a alors : $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left[G'_X(1)\right]^2$

4.3 V.A. centrée réduite.

Théorème 9. Centrée réduite

On considère X une V.A. à valeurs dans $\mathbb{R}$ non "presque surement constante" ainsi $V(X) > 0$.
On note $e = E(X)$ l'espérance et $\sigma = \sqrt{V(X)}$ l'écart type

Alors la variable aléatoire $\widetilde{X} = \dfrac{X - e}{\sigma}$ est centrée et réduite

CàD $E\left(\widetilde{X}\right) = 0$ et $V\left(\widetilde{X}\right) = 1$

Démonstration : La démonstration est simple, il suffit d'appliquer les formulaires

$$E\left(\widetilde{X}\right) = E\left(\frac{X - e}{\sigma}\right)$$

On utilise le formulaire de l'espérance

Sachant que e et σ sont des nombres

$$= \frac{E(X) - e}{\sigma} = \frac{e - e}{\sigma} = 0$$

$$V\left(\widetilde{X}\right) = V\left(\frac{X - e}{\sigma}\right)$$

$$= V\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{e}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$$

5 Covariance de 2 V.A.

Définition 10. covariance

On considère deux V.A. X et Y

On définit la covariance de X, Y noté $cov(X,Y)$ par la formule

$$cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

Rappel : on a : $E(X.Y) = \sum_{(k,k')\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} k\,k'\,\mathbb{P}(X = k\ et\ Y = k')$

Lorsque X, Y sont deux V.A. indépendantes alors $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ et donc $cov(X,Y) = 0$

Moralité : la covariance mesure le degré d'indépendance.

Théorème 11. Formulaire sur la covariance

> La covariance $cov(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire, symétrique et $cov(X,X) = V(X)$

> $V(X+Y) = V(X) + 2.cov(X,Y) + V(Y)$

> Lorsque les V.A. X et Y sont indépendantes, alors $cov(X,Y) = 0$

et avec la formule précédente, on retrouve $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

*A*ttention : indépendantes $\Rightarrow cov(X,Y) = 0$ mais $cov(X,Y) = 0 \not\Rightarrow$ indépendantes.

> Kulture. Il y a une analogie entre :

- d'une part $cov(X,Y)$ et produit scalaire $<\vec{u},\vec{v}>$
- d'autre part $V(X)$ et norme $||\vec{u}||^2$

Cependant $V(X) = 0 \Longrightarrow$ la V.A. X est simplement constante. (et pas forcément nulle.)

Démonstration :

$cov(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire ?

On utilise la def de la covariance et la linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}
cov(aX+bX',Y) &= E\big((aX+bX').Y\big) - E\big((aX+bX')\big).E(Y)\\
&= E\big((a(XY)+b(X'Y))\big) - \big[aE(X)+bE(X')\big].E(Y)\\
&= a\,E(XY) + b\,E(X'Y) - a\,E(X).E(Y) - b\,E(X').E(Y)\\
&= a\,[E(XY) - E(X).E(Y)] + b\,\big[E(X'Y) - E(X').E(Y)\big]\\
&= a\,cov(X,Y) + b\,cov(X',Y)
\end{aligned}$$

De même pour $cov(X, \alpha Y + \beta Y')$

$cov(\cdot,\cdot)$ est symétrique ?

Par définition $cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$

$cov(Y.X) = E(Y,X) - E(Y).E(X)$

Donc c'est bien égale.

$V(X+Y) = V(X) + 2.cov(X,Y) + V(Y)$?

On applique la formule $cov(\square,\square) = V(\square)$ avec $\square = X+Y$ et on utilise la bilinéarité et la symétrie de la covariance

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= cov(X+Y, X+Y)\\
&\textit{On utilise la bilinéarité}\\
&= cov(X,X) + cov(X,Y) + cov(Y,X) + cov(Y,Y)\\
&= V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)
\end{aligned}$$

6 Dispersion.

6.1 Markov et Bienaimé-Chebychev.

Théorème 12. Inégalité de Markov

On considère X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ (ou dans $\mathbb{R}^+$.)

$$\text{On a : } \forall\, M>0,\ \mathbb{P}\Big(X \geqslant M\Big) \leqslant \frac{E(X)}{M}$$

Ainsi la probabilité que $X(\omega)$ soit grand est de plus en plus faible.

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{\to+\infty} k.\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} k.\mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=M}^{\to+\infty} k.\mathbb{P}(X=k) \\
&\geqslant \sum_{k=0}^{M-1} 0.\mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=M}^{\to+\infty} M.\mathbb{P}(X=k) \\
&\geqslant 0 + M\sum_{k=M}^{\to+\infty} \mathbb{P}(X=k)
\end{aligned}$$

Or $[X \geqslant M]$ est la réunion disjointe de $[X=M]$ et de $[X=M+1]$ et de $[X=M+1]$ et de ....

$$\geqslant M.\mathbb{P}(X \geqslant M)$$

Théorème 13. Inégalité de Bienaimé-Chebychev

On considère X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$.
On note $e = E(X)$ l'espérance et $V(X)$ la variance .

$$\text{On a : } \mathbb{P}\Big(|X-e| \geqslant M\Big) \leqslant \frac{V(X)}{M^2}$$

Interprétation.

> L'évènement $= |X-e| \geqslant M$ signifie

$$|X(\omega)-e| \geqslant M \iff X(\omega) \notin [e-M, e+M]$$

Donc on mesure la probabilité que $X(\omega)$ s'écarte de l'espérance.

> Cette probabilité est mesuré par la variance

> Cette probabilité décroit de façon quadratique .

Démonstration : On considère la Variable aléatoire $Y = (X-e)^2$.
On a facilement

$$E(Y) = E\Big[(X-e)^2\Big] = E\Big[X^2 - 2eX - e^2\Big]$$

On distribue E

$$= E\Big[X^2\Big] - 2eE[X] + e^2$$

$$= E\Big[X^2\Big] - 2e.e + e^2 = E\Big[X^2\Big] - e^2 = V(X)$$

J'ai refait le calcul

Mais la def de la variance c'est $V(X) = E\Big[(X-e)^2\Big]$

Donc on a chauffé de l'eau chaude.

On applique l'inégalité de Markov à la Variable aléatoire Y qui est $\geqslant 0$ avec la constante M^2

$$\text{Ainsi on a } \mathbb{P}\Big(Y \geqslant M^2\Big) \leqslant \frac{E(Y)}{M^2} = \frac{V(X)}{M^2}$$

On a de plus $\left[Y \geqslant M^2\right] \iff \left[(X-e)^2 \geqslant M^2\right] \iff [|X-e| \geqslant M]$

Conclusion : $\mathbb{P}(|X-e| \geqslant M) = \mathbb{P}\left(Y \geqslant M^2\right) \leqslant \dfrac{E(Y)}{M^2} = \dfrac{V(X)}{M^2}$

6.2 Applications : Intervalle de confiance, Concentration.

Théorème 14.
Soit X une V.A. à valeur dans $\mathbb{R}$
On note e l'espérance $E(X)$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$ l'écart type.

Intervalle de confiance.

J'applique l'inégalité de de Bienaimé-Chebychev avec $M = c.\sigma$,

ainsi $\mathbb{P}\left(X(\omega) \notin [e-c.\sigma, e+c.\sigma]\right) = \mathbb{P}\left(|X-e| \geqslant c.\sigma\right) \leqslant 1/c^2$

$$\boxed{\text{Ainsi on a} \quad \mathbb{P}\left(X(\omega) \in [e-c.\sigma, e+c.\sigma]\right) \geqslant 1 - \frac{1}{c^2}}$$

Exemples.

> Avec $c = 2$, on a 75% chance que $X(\omega) \in [e-2\sigma, e-2\sigma]$.

> Avec $c = 3$, on a presque 90% chance que $X(\omega) \in [e-3\sigma, e-3\sigma]$.

> Avec $c = 10$, on a 99% chance que $X(\omega) \in [e-10\sigma, e-10\sigma]$.

Concentration autour de la moyenne.

On répète n fois et indépendamment la V.A. X et je les note $X_1, \ldots, X_n$
On considère $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ la moyenne des résultats obtenues.

$$\boxed{\text{On alors : } E(M_n) = e \quad \text{et} \quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}}$$

Interprétation : Comme $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,
on dit que <u>en moyenne</u> les résultats se concentrent sur l'espérance.

Illustration. On repend les intervalles précédents avec l'écart type de $M_n = \sigma' = \sqrt{V(M_n)} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

> On a 75% chance que $M_n \in \left[e - \dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}, e + \dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

> On a presque 90% chance que $M_n \in \left[e - \dfrac{3\sigma}{\sqrt{n}}, e + \dfrac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

> On a 99% chance que $M_n \in \left[e - \dfrac{10\sigma}{\sqrt{n}}, e + \dfrac{10\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

7 Exercices

Exercice 1. [Correction] Une urne contient une boule blanche et $n-1$ boules rouges que l'on tire une à une sans remise.
On note X le rang de sortie de la première boule blanche.
On note B_i l'évènement : "J'ai tiré une boule blanche au tirage numéro i

1. Déterminer $X(\Omega)$ et exprimer $X=k$ à l'aide des B_i
   En déduire la loi de X puis calculer $E(X)$.
2. Même question avec : Une urne contient deux boules blanches et $n-2$ boules rouges

Exercice 2. [Correction] On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis de nouveau au hasard un entier Y entre 1 et X.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 3. [Correction] Un ascenseur dessert les k étages d'un immeuble avec $k \in \mathbb{N}^*$.
Au rez-de-chaussée, n personnes $p_1, \dots p_n$ entrent dans l'ascenseur, et chacune descend à un étage donné avec probabilité $1/k$ indépendamment du choix de ses voisins.
On suppose de plus que personne ne monte dans l'ascenseur aux étages.
On note X_i la variable valant 1 Si «l'ascenseur s'arrête à l'étage i» et 0 sinon
et X le nombre total d'arrêts de l'ascenseur.

1. Pour $i \in \{1,2,\dots,n\}$, exprimer l'évènement $X_i = 0$ à l'aide des évènement A_k : la personne p_k descente à l'étage i
   En déduire que la V.A. X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^n$.
2. Exprimer X à l'aide des $(X_i)_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$. En déduire $E(X)$

Exercice 4. Un téléphone contient $n \geqslant 2$ chansons, et fonctionne en mode aléatoire en choisissant à la fin de chaque chanson une nouvelle chanson parmi les n, s'autorisant ainsi à lire plusieurs fois de suite la même chanson.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de chansons différentes qui ont été jouées au moins une fois parmi les k premières chansons.

1. Déterminer le support de X_k.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X_k = 1)$ et $\mathbb{P}(X_k = k)$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $\forall\, i \in \{1,2,\dots,n\}$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \dfrac{i}{n}\mathbb{P}(X_k = i) + \dfrac{n-i+1}{n}\mathbb{P}(X_k = i-1)$
4. Donner alors une relation entre $E(X_{k+1})$ et $E(X_k)$, puis l'expression générale de $E(X_k)$ en fonction de k et n.

Exercice 5. [Correction]

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine $\mathcal{O}$ par bonds successifs d'une ou deux unités suivant la procédure suivante :

> Au départ, la puce est en $\mathcal{O}$.

> Si, à un instant la puce est au point d'abscisse k, à l'instant d'après elle sera en k+1 avec probabilité $1/2$ ou en k+2 avec probabilité $1/2$.

> Les sauts sont indépendants.

1. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts.
   Déterminer la loi, l'espérance et la variance de S_n.
2. On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après n sauts.
   Exprimer X_n en fonction de S_n.
   En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.
3. On note Y_n la V.A. égale au nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la case d'abscisse n.
   (a) Déterminer les valeurs prises par Y_n.
   (b) Montrer que pour tout entier $n > 2$ et tout entier $k > 1$.
   $$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)$$

(c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$$

(d) Trouver une solution particulière de $u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n + 1$ de la forme $\lambda \times n$. En déduire $\mathbb{E}(Y_n)$

Exercice 6. Soit $n \geqslant n$, soit r tel que $0 \leqslant r \leqslant n$.

Un placard contient n paires de chaussures.

On tire, au hasard, 2r chaussures du placard.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées.

Les paires du placard sont numérotées de 1 à n.

Pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ème paire se trouve parmi les chaussures tirées et 0 sinon.

1. Pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$, déterminer la loi et l'espérance de X_i.
2. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 7. [Correction] Exercice plus difficile et surtout la question Q4 est technique.

Soit r un entier naturel non nul.

On dispose d'un sac contenant r jetons numérotés de 1 à r dans lequel on peut effectuer une succession de tirages **avec remise** en notant, à chaque fois, le numéro obtenu.

Pour tout entier naturel n non nul,

on note T_n le nombre de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages.

Soit n un entier naturel non nul.

1. Déterminer le support de T_n et calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = n)$.
2. Vérifier que : $\mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{n}{2}\frac{2^n - 2}{r^n}$.
3. Soit (k, n) un couple d'entiers naturels non nuls tels que $1 \leqslant k \leqslant r$.

   Déterminer une relation entre $\mathbb{P}(T_{n+1} = k)$, $\mathbb{P}(T_n = k)$ et $\mathbb{P}(T_n = k-1)$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction génératrice $G_n(X)$ de la V.A. T_n

   $$\text{CàD} \quad G_n(X) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_n = k) X^k$$

   (a) Montrer, pour tout entier naturel n non nul : $G_{n+1}(X) = \frac{1}{r}(X - X^2)\, G_n'(X) + X\, G_n(X)$

   (b) On sait que : $E(T_n) = G_n'(1)$.

   Exprimer $E(T_{n+1})$ en fonction de $E(T_n)$, r et n.

   (c) Déterminer ensuite $E(T_n)$ en fonction de r et n.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Déterminer la loi de X puis calculer $E(X)$.

   Il est clair que $X(\Omega) = \{1, 2, ..., (n-1), n\}$

   Pour $k \in X(\Omega) = \{1, 2, ..., (n-1), (n)\}$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k\right)$$

Formule des probabilités composées

$$= \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right)\mathbb{P}_{\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right)\mathbb{P}_{\overline{B_1}\ et\ \overline{B_2}}\left(\overline{B_3}\right)\cdots\mathbb{P}_{\overline{B_1}\ et\ \overline{B_2}\ et\ ....\ et\ \overline{B_{k-1}}}\left(B_k\right)\mathbb{P}_{\overline{B_1}\ et\ \overline{B_2}\ et\ ....\ et\ \overline{B_{k-2}}}\left(\overline{B_{k-1}}\right)$$

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \frac{n-1-(k-1)}{n-1-(k-2)} \frac{1}{n-(k-1)}$$

$$= \frac{1}{n}$$

2. Déterminer la loi de X puis calculer $E(X)$.

   Il est clair que $X(\Omega) = \{1, 2, ..., (n-2), (n-1)\}$

   Pour $k \in X(\Omega) = \{1, 2, ..., (n-2), (n-1)\}$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k\right)$$

Formule des probabilités composées

$$= \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right)\mathbb{P}_{\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right)\mathbb{P}_{\overline{B_1}\ et\ \overline{B_2}}\left(\overline{B_3}\right)\cdots\mathbb{P}_{\overline{B_1}\ et\ \overline{B_2}\ et\ ....\ et\ \overline{B_{k-1}}}\left(B_k\right)\mathbb{P}_{\overline{B_1}\ et\ \overline{B_2}\ et\ ....\ et\ \overline{B_{k-2}}}\left(\overline{B_{k-1}}\right)$$

$$= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \cdots \frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)} \frac{2}{n-(k-1)}$$

$$\frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \cdots \frac{n-k}{n-k+2} \frac{2}{n-k+1}$$

$$= 2\frac{n-k}{n(n-1)}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. C'est une loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$, CàD on a $\forall\, k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathbb{P}([X = k]) = {}^{1}/_{n}$. Ainsi

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k.\mathbb{P}([X = k]) = \cdots = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2.\mathbb{P}([X = k]) = \cdots = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Ainsi } V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left[\frac{n+1}{2}\right]^2$$

2. Pour $p \in\in \{1, 2, ..., n\}$, on calcule $\mathbb{P}(Y = p)$ avec la formule des probabilités totales et le système complet d'évènements $[X = 1], [X = 2], ..., [X = n]$, on a

$$\forall p \in \{1, 2, ..., n\},\ \mathbb{P}(Y = p) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k])\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = p])$$

Si $k < p$ *alors* $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = p]) = 0$

Si $k \geqslant p$ *alors* $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = p]) = {}^{1}/_{k}$

$$= \sum_{k=p}^{n} \mathbb{P}([X = k])\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = p])$$

$$= \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Pour $i \in \{1,2,...,n\}$, exprimer l'évènement $X_i = 0$ à l'aide des évènement A_k : la personne p_k descente à l'étage i

   $X_i = 0$ Ssi personne de s'arrête à l'étage i, CàD $X_i = 0 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$

   En déduire que la V.A. X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n$.

   Soit l'assesseur s'arrête, soit l'assesseur ne s'arrête pas donc la V.A. X_i suit la loi de Bernoulli
   Comme les évènements $A_1,...,A_n$ sont indépendant, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i = 0) &= \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right)\\ &= \prod_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_p}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)\\ &= \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n\end{aligned}$$

   Ainsi $p = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n$

2. Exprimer X à l'aide des $(X_i)_{i \in \{1,2,...,n\}}$. En déduire $E(X)$

   On a facilement $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$

$$\text{Conclusion } E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) = \sum_{p=1}^{k} E(X_p) = k.p = k\left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n\right]$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. À chaque saut, il y a 2 choix (chacun avec une probabilité $1/2$) et les sauts sont indépendants

   Donc S_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$

$$\text{Ainsi on a } \mathbb{E}(S_n) = np = \frac{n}{2} \text{ et } V(S_n) = np\bar{p} = \frac{n}{4}.$$

2. Il est clair que $X_n = 2S_n + 1(n - S_n) = S_n + n$,

$$\text{Ainsi on a } \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(S_n + n) = \mathbb{E}(S_n) + n = n + \frac{n}{2} \text{ et } V(X_n) = V(S_n + n) = 1^2 V(S_n) = \frac{n}{4}.$$

3. Étude de la V.A. Y_n

   (a) On a $Y(\Omega) = \{n/2, ..., n\}$.

   (b) On note X_1 la valeur du premier saut,

   On a $X_1(\Omega) = \{1,2\}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = 1/2$

   De plus $\mathbb{P}_{X1=1}(Y_n = k) = \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1)$ et $\mathbb{P}_{X1=2}(Y_n = k) = \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)$

   et avec la formule des probabilités totales, on a bien : $\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)$

   (c) On a $\mathbb{E}(Y_n) = \sum k\mathbb{P}(Y_n = k) = \cdots$

   (d) solution particulière + solution homogène.

   solution homogène : Facile.
   solution particulière : On cherche une solution de la forme : $polynôme \times géo$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Le support de la VA T_n est égale à $\{1,2,...,r\}$.
   On note R_i le numéro du i-ième tirage

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n=1) &= \mathbb{P}\Big([R_1=\cdots=R_n=1]\sqcup[R_1=\cdots=R_n=2]\sqcup...\sqcup[R_1=\cdots=R_n=r]\Big)\\ &= \frac{1}{r^n}+\frac{1}{r^n}+\cdots+\frac{1}{r^n}\\ &= \frac{1}{r^{n-1}}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(T_n=n)=\begin{cases} Si\ r<n & =0\\ Si\ r\geqslant n & =\mathbb{P}(R_1\neq R_2\neq\cdots\neq R_n)=\mathbb{P}_{R_1}(R_2)\,\mathbb{P}_{R_1,R_2}(R_3)\cdots\mathbb{P}_{R_1,R_2,..R_{n-1}}(R_n)=\dfrac{r-1}{r}\cdots\dfrac{r-n+1}{r}\end{cases}$$

2. On modélise un "tirage" par une liste $(a_1,a_2,...,a_n)$ avec $\forall\, i\in\{1,2,...,n\},\ a_i\in\{1,2,...,r\}$
   Toutes les listes sont équiprobable, ainsi pour calculer $\mathbb{P}(T_n=2)$ j'utilise $\dfrac{Favorable}{total}$
   Je note R_i le résultat du i-ième tirage.
   Total
   Pour a_1, j'ai r possibilités, Pour a_2, j'ai r possibilités,..
   Conclusion : Total $=r^n$ possibilités
   favorable
   Je choisis 2 numéros noté α,β parmi le r possibles, j'ai $\binom{r}{2}$ possibilités
   Pour a_1, j'ai 2 possibilités, Pour a_2, j'ai 2 possibilités,...
   Conclusion : favorable $=\binom{r}{2}\times 2^n$ possibilités
   Attention *il ne faut pas compter les 2 tirages mono-numéro, CàD* $a_1=a_2=...=a_n=\alpha$ *et* $a_1=a_2=...=a_n=\beta$
   Conclusion final : favorable $=\binom{r}{2}\times(2^n-2)$ possibilités
3. On applique la formule des probabilités totale avec le système complet $T_n=i$ pour $i\in\{1,2,...,r\}$, ainsi

$$\mathbb{P}(T_{n+1}=k)=\sum_{i=0}^{r}\mathbb{P}(T_n=i)\mathbb{P}_{T_n=i}(T_{n+1}=k)$$

   De plus
   > Lorsque $i\neq(k-1),k$, alors $\mathbb{P}_{T_n=i}(T_{n+1}=k)=0$.
   > Lorsque $i=k-1$, alors $\mathbb{P}_{T_n=k-1}(T_{n+1}=k)=\dfrac{r-(k-1)}{r}=\dfrac{r-k+1}{r}$.
   > Lorsque $i=k$, alors $\mathbb{P}_{T_n=k}(T_{n+1}=k)={}^{k}/_{r}$.

$$\text{Conclusion : }\mathbb{P}(T_{n+1}=k)=\frac{r-k+1}{r}\mathbb{P}(T_n=k-1)+\frac{k}{r}\mathbb{P}(T_n=k)$$

4. Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme $Q_n(X)$ défini par :

$$Q_n(X)=E(X^{T_n})=\sum_{k=1}^{r}\mathbb{P}(T_n=k)X^k$$

(a) On a

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(X) &= \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_{n+1}=k)\,X^k \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left[\frac{r-k+1}{r}\,\mathbb{P}(T_n=k-1) + \frac{k}{r}\,\mathbb{P}(T_n=k)\right] X^k \\
&= \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_n=k-1)\,X^k - \sum_{k=1}^{r} \frac{k-1}{r}\,\mathbb{P}(T_n=k-1)\,X^k + \sum_{k=1}^{r} \frac{k}{r}\,\mathbb{P}(T_n=k)\,X^k \\
&= \sum_{k=1}^{r} \frac{k}{r}\,\mathbb{P}(T_n=k)\,X^k - \sum_{k=1}^{r} \frac{k-1}{r}\,\mathbb{P}(T_n=k-1)\,X^k + \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_n=k-1)\,X^k \\
&= \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_n=k)\,\frac{k}{r}\,X^k - \sum_{p=0}^{r-1} \mathbb{P}(T_n=p)\,\frac{p}{r}\,X^{p+1} + \sum_{p=0}^{r-1} \mathbb{P}(T_n=p)\,X^{p+1} \\
&\quad \textit{Or } \mathbb{P}(T_n=0)=0 \\
&= \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_n=k)\,\frac{k}{r}\,X^k - \sum_{p=0}^{r} \mathbb{P}(T_n=p)\,\frac{p}{r}\,X^{p+1} + \underbrace{\cdots}_{p=r} + \sum_{p=0}^{r} \mathbb{P}(T_n=p)\,X^{p+1} - \underbrace{\cdots}_{p=r} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_n=k)\,\frac{k}{r}\,X^k - \sum_{p=0}^{r} \mathbb{P}(T_n=p)\,\frac{p}{r}\,X^{p+1} + \sum_{p=0}^{r} \mathbb{P}(T_n=p)\,X^{p+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}(X-X^2)\,Q_n'(X) + X\,Q_n(X) = \\
&\qquad = \frac{(X-X^2)}{r} \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_n=k)\,k\,X^{k-1} + X \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_n=k)\,X^k \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_n=k)\,\frac{k}{r}\,X^k - \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_n=k)\,\frac{k}{r}\,X^{k+1} + \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_n=k)\,X^{k+1}
\end{aligned}$$

Donc on a bien égalité.

(b) Il est clair quand on détaille les sommes que : $E(T_n) = Q_n'(1)$.

Comme $Q_{n+1}(X) = \frac{1}{r}(X-X^2)\,Q_n'(X) + X\,Q_n(X)$, on a

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}'(X) &= \frac{1}{r}\left[(1-2X)\,Q_n'(X) + (X-X^2)Q_n''(X)\right] + \left[Q_n(X) + X\,Q_n'(X)\right] \\
\implies\ Q_{n+1}'(1) &= \frac{1}{r}\left[(1-2)\,Q_n'(1) + (0)Q_n''(1)\right] + \left[\underbrace{Q_n(1)}_{=1} + 1\,Q_n'(1)\right]
\end{aligned}$$

Conclusion : $E(T_{n+1}) = Q_{n+1}'(1) = \left(1-\frac{1}{r}\right)Q_n'(1) + 1 = \left(1-\frac{1}{r}\right)E(T_n) + 1$

(c) La suite $(E(T_n))$ est une suite arithmético-géométrique, la théorie classique assure que

$$\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ E(T_n) = \lambda\left(1-\frac{1}{r}\right)^n + r$$

De plus $E(T_1) = 1$, ainsi $\lambda = -r$

$$\text{Conclusion : } \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ E(T_n) = r - r\left(1-\frac{1}{r}\right)^n$$