**Exercice 1.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $I_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$

On veut déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

On considère la fonction $f_n$ définie par : $\forall\, t\in[0,n],\ f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$

1. Montrer que : $\forall\, u>-1,\ \ln(1+u)\leqslant u$.

   En déduire que : $\forall\, t\in[0,n],\ \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t$ et $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.

2. En déduire une minoration sur $[0,n]$ de $f_n(t)\,e^t$.

   Puis que : $\forall\, t\in[0,n],\ 0\leqslant e^{-t}-f_n(t)\leqslant e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]$

3. Montrer que : $\forall\, u\in[0,1],\ 1-(1-u)^n\leqslant n\,u$.

4. Montrer que : $\forall\, t\in[0,n],\ e^{-t}-\frac{t^2\,e^{-t}}{n}\leqslant f_n(t)\leqslant e^{-t}$.

5. Conclure.

**Exercice 2.** [Correction] On considère la fonction $f$ définie par l'expression $f(x)=\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt$

## A. Généralités.

1. Justifier rigoureusement que la fonction $f$ est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2. Préciser le signe de la fonction $f$.
3. Donner la définition de : la fonction $f$ est décroissante.

   Montrer que $f$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
4. Soit $a>0$. Montrer que la fonction $f$ est lipschitzienne sur $[a,+\infty[$.

   En déduire que la fonction $f$ est continue sur $[a,+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que $\forall\, x>0,\ f(x)=\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt = e^{-x}\int_x^{x+1}\frac{e^u}{u}\,du$.
6. On pose $g(x)=e^x f(x)=\int_x^{x+1}\frac{e^u}{u}\,du$.

   Justifier que $g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et déterminer l'expression explicite de $g'(x)$.
7. En déduire que $f$ est solution d'une équation différentielle de la forme $y'+y=\alpha(x)$, où $\alpha$ est une fraction rationnelle à expliciter.
8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $f'(x)=-\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}\,dt$.

## B. Étude asymptotique de la fonction $f$.

1. Étude en $+\infty$

   Montrer que : $\forall\, x\in]0,+\infty[,\ \frac{e-1}{x+1}\leqslant f(x)\leqslant \frac{e-1}{x}$.

   En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
2. Étude en $0^+$
   (a) Justifier l'existence d'un réel $M\geqslant 0$ tel que $\forall\, t\in[0,1], \left|e^t-1\right|\leqslant M t$.

   (b) En déduire que : $\int_0^1 \frac{e^t-1}{x+t}\,dt \underset{x\to 0}{=} o\big(\ln(x)\big)$.

   (c) En déduire que : $f(x)\underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$.

**Exercice 3.**

## Problème 2 : algèbre

À tout couple de réels $(a,b)$, on associe

> la matrice $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

> le nombre complexe $\omega = a+ib$. On notera $\rho$ et $\theta \in ]-\pi,\pi]$, le module et l'argument du nombre $\omega$.
On a donc $\omega = a+ib = \rho\, e^{i\theta}$

## A. Calcul matriciel.

1. Montrer que $F = \{M_{a,b} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On précisera la dimension de $F$, et on en donnera une base.
2. Montrer que $F$ est stable par produit et par passage à l'inverse (Si $M_{a,b}$ est inversible).
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ M_{a,b}^n = \rho^n M_{\cos(n\theta),\sin(n\theta)}$.

Dans toute la suite du problème, on supposera désormais que $b$ est un réel non nul.

## B. Un espace vectoriel de fonctions.

Dans cette partie, on note $E$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère $G$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par la famille $(\ f_1, f_2\ )$,
avec $f_1 : x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$ et $f_2 : x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$.

On note enfin $\phi$ l'application qui associe à toute fonction $f \in G$ sa dérivée $f'$.

1. Montrer que la famille $(\ f_1, f_2\ )$ est une base de $G$.
2. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $G$, et donner sa matrice $A$ dans la base $(f_1, f_2)$.
3. Montrer que la fonction $\varphi$ est bijective.
En déduire que toute fonction $f \in G$ admet une unique primitive appartenant à $G$ que l'on déterminera.

## C. Diagonalisation de la matrice $M_{a,b}$.

On note dans cette partie $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ ayant pour matrice $M_{a,b}$ dans la base canonique $\mathscr{B} = \big((1,0),(0,1)\big)$ de $\mathbb{C}^2$.

1. Montrer que les noyaux $\ker(f-\omega id)$ et $\ker(f-\overline{\omega} id)$ sont tous les deux de dimension 1 , engendrés respectivement par les vecteurs $u = (1,-i)$ et $v = (1,i)$.
2. Justifier que $\mathscr{C} = (u,v)$ est une base de $\mathbb{C}^2$.
Préciser la matrice de passage $P$ de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{C}$, et calculer son inverse $P^{-1}$.
3. Déterminer la matrice $D$ de $f$ dans la base $\mathscr{C}$, et exprimer $M_{a,b}$ en fonction de $P$, $P^{-1}$ et $D$.
4. Calculer $D^n$ en fonction de $\rho$ et de $\theta$, et retrouver ainsi le résultat de la question A.3.

## D. Étude d'une suite.

À la matrice $M_{a,b}$ on associe désormais la fonction $h_{M_{a,b}}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{a}{b}\right\}$ par $h_{M_{a,b}}(x)=\dfrac{ax-b}{bx+a}$.

1. Montrer que cette fonction est bijective vers un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ à préciser.
2. Montrer que $\left(h_{M_{a,b}}\right)^{-1}=h_{M_{a,b}^{-1}}$.
3. On veut définir une suite $(u_n)$ par les conditions $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=h_{M_{a,b}}(u_n)=\dfrac{au_n-b}{bu_n+a}$.

   À quelle condition sur $a$ et $b$ la valeur de $u_1$ est-elle bien définie ?
   Et celle de $u_2$ ?
4. On suppose qu'il est possible de construire les premiers termes de la suite $(u_n)$, jusqu'à $u_p$ inclus (avec $p\geqslant 2$ ).
   (a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha_p$ non nul tel que $M_{a,b}^n\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\alpha_p\begin{pmatrix}u_p\\1\end{pmatrix}$.
   (b) En déduire une expression de $u_p$ en fonction de $p$ et de $\theta$.
   (c) Vérifier que le terme suivant $u_{p+1}$ est correctement défini si et seulement si $\cos((p+1)\theta)\neq 0$.
5. Montrer que la suite $(u_n)$ est correctement définie si $\theta\notin\left\{\dfrac{2p+1}{2q}\pi\,\middle|\,p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}^*\right\}$.

**Solution de l'exercice 2 (Énoncé)**

## A. Généralités.

1. Justifier rigoureusement que la fonction $f$ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

   On peut calculer le nombre $f(x)$

   Ssi la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^t}{t+x}$ est continue sur $[0,1]$

   Ssi $\forall\, t \in [0,1],\ x+t \neq 0$

   Ssi $x \notin [-1,0]$

   Conclusion : La fonction $f$ est définie sur $]0,+\infty[$.

2. Préciser le signe de la fonction $f$.

   Pour tout $x>0$.

   > On sait que : $\forall\, t \in [0,1],\ \dfrac{e^x-1}{x+t} \geqslant 0$.

   > J'intègre l'inégalité sur $[0,1]$, ainsi $f(x) \geqslant 0$

   Conclusion : La fonction $f$ est positive sur $]0,+\infty[$.

3. Montrer que $f$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

   On suppose que $0<x<x'$. ainsi

$$\begin{aligned} f(x')-f(x) &= \int_0^1 \frac{e^t}{t+x'}\,dt - \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^t}{t+x'} - \frac{e^t}{t+x}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^t(x-x')}{(t+x')(t+x)}\,dt \\ &= \underbrace{(x-x')}_{<0\ sur\ [0,1]} \int_0^1 \underbrace{\frac{e^t}{(t+x')(t+x)}}_{>0\ sur\ [0,1]}\,dt < 0 \end{aligned}$$

   Conclusion : La fonction $f$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

4. Soit $a>0$. Montrer que la fonction $f$ est lipschitzienne sur $[a,+\infty[$.

   On revient à la définition. Pour tout $x,x' \geqslant a>0$, on a

$$\begin{aligned} \left|f(x')-f(x)\right| &= \left|(x-x')\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x')(t+x)}\,dt\right| \\ &\leqslant \left|(x-x')\right| \int_0^1 \left|\frac{e^t}{(t+x')(t+x)}\right|\,dt \\ &\leqslant \left|(x-x')\right| \int_0^1 \underbrace{\frac{e^t}{(t+x')(t+x)}}_{\geqslant 0\ sur\ [0,1]}\,dt \\ &\leqslant \left|(x-x')\right| \underbrace{\int_0^1 \frac{e^t}{(t+a)(t+a)}\,dt}_{Konstant} \end{aligned}$$

   Conclusion : La fonction $f$ est lipschitzienne sur $[a,+\infty[$.

   En déduire que la fonction $f$ est continue sur $[a,+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Sur $[a,+\infty[$, la fonction $f$ est lipschitzienne donc continue.

   Sur $\mathbb{R}_+^*$. À méditer.

5. Montrer que $\forall\, x>0,\ f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt = e^{-x}\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,du$.

   On fait le changement de variable $u=t+x$

6. On pose $g(x) = e^x f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,du$.

   Justifier que $g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et déterminer l'expression explicite de $g'(x)$.

Comme $x>0$, la fonction $u \longmapsto \dfrac{e^u}{u}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[x,x+1]$ donc la fonction de la borne variable $g$ est $\mathscr{C}^\infty$

Et $\forall x>0,\ g'(x)=\dfrac{e^{x+1}}{x+1}-\dfrac{e^x}{x}$

7. En déduire que $f$ est solution d'une équation différentielle de la forme $y'+y=\alpha(x)$, où $\alpha$ est une fraction rationnelle à expliciter.

8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $f'(x)=-\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt$.

## B. Étude asymptotique de la fonction $f$.

1. Étude en $+\infty$

Montrer que : $\forall x\in\,]0,+\infty[,\ \dfrac{e-1}{x+1}\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{e-1}{x}$.

Pour $x>0$

> $\forall t\in[0,1],\ \dfrac{e^t}{1+x}\leqslant\dfrac{e^t}{t+x}\leqslant\dfrac{e^t}{0+x}$

> On intègre .....

En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

Comme $\dfrac{e-1}{x+1}\underset{x\to\infty}{=}\dfrac{e-1}{x}$ et $\dfrac{e-1}{x}\underset{x\to\infty}{=}\dfrac{e-1}{x}$, on a avec le théorème des gendarmes

Conclusion : $f(x)\underset{x\to\infty}{=}\dfrac{e-1}{x+1}\underset{x\to\infty}{=}\dfrac{e-1}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$

2. Étude en $0^+$

(a) Justifier l'existence d'un réel $M\geqslant 0$ tel que $\forall t\in[0,1], \left|e^t-1\right|\leqslant Mt$.

La fonction $exp$ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t\in[0,1],\ \left|e^t\right|=e^t\leqslant e$

Donc d'après le TAF, la fonction $exp$ est $e$-lipschitzienne sur $[0,1]$

CàD $\forall x,x'\in[0,1],\ \left|e^x-e^{x'}\right|\leqslant e\left|x-x'\right|$

On applique avec $t\in[0,1]$ et $x'=0$, ainsi $\left|e^t-1\right|\leqslant e|t-0|=e\,t$

Conclusion : La constante $M=e$ convient.

(b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^1\frac{e^t-1}{x+t}dt\underset{x\to 0}{=}o\big(\ln(x)\big)$.

On a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\frac{e^t-1}{x+t}dt\right|&\leqslant\int_0^1\left|\frac{e^t-1}{x+t}\right|dt\\&\leqslant\int_0^1\frac{Mt}{x+t}dt\\&\leqslant M\int_0^1\left(1-\frac{x}{x+t}\right)dt\\&\leqslant M\Big(1-x\big[\ln(x+1)-\ln(x)\big]\Big)\end{aligned}$$

En déduit que le quotient $\left|\dfrac{\int_0^1\frac{e^t-1}{x+t}dt}{\ln(x)}\right|\xrightarrow[x\to 0]{}0$

(c) En déduire que : $f(x)\underset{x\to 0}{\sim}-\ln(x)$.

On a

$$\begin{aligned}f(x)=\int_0^1\frac{e^t}{x+t}dt&=\int_0^1\frac{1}{x+t}dt+\int_0^1\frac{e^t-1}{x+t}dt\\&=\ln(x+1)-\ln(x)+o\big(\ln(x)\big)\\&=-\ln(x)+o\big(\ln(x)\big)+o\big(\ln(x)\big)\underset{x\to 0}{\sim}-\ln(x)\end{aligned}$$