Exercice 1. [Correction] On suppose que le nombre d'enfants dans une famille française est une variable aléatoire X. Pour connaître la loi de X, on propose le protocole suivant :

on interroge tous les élèves d'une école pour connaître le nombre d'enfants dans leur famille.

On va voir que cette approche introduit un biais en considérant une situation particulière

On notera $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et on suppose $0 \leqslant k \leqslant 41$

1. On note M_k le nombre de familles à k enfants de la population étudiée (tous les enfants de toutes ces familles vont dans l'école où s'effectue le sondage)

   ainsi le nombre total de familles est égale à $M = \sum_{k=0}^{41} M_k$ et on a donc $p_k = \dfrac{M_k}{M}$.

   On note également N_k le nombre total d'enfants appartenant à une famille de k enfants

   ainsi le nombre total d'enfants présents dans l'école est égale à $N = \sum_{k=0}^{41} N_k$.

   (a) Montrer que $N_k = k\, p_k\, M$.

   (b) Montrer que $N = M\, e$ avec $e = E(X)$

   (c) Montrer que la proportion d'enfants issus d'une famille à k enfants vaut $q_k = \dfrac{k\, p_k}{e}$.

2. On choisit un élève de l'école au hasard et on lui demande le nombre d'enfants dans sa famille.
   On note Y ce nombre d'enfants.

   (a) Préciser la support de Y et donner la loi vérifiée par la variable Y .
   Est-ce la même que celle de la variable X ?

   (b) Montrer que $E(Y) = \dfrac{E(X^2)}{e} = \dfrac{E(X^2)}{E(X)}$ et justifier que : $E(Y) \geqslant E(X)$.
   Expliquer pourquoi $E(Y) \geqslant E(X)$ est "naturel"

3. Exemple 1 : On suppose que : $X \sim \mathscr{B}\left(10, {}^1/_5\right)$.
   Rappeler l'expression de p_k.
   Donner les valeurs de $e = E(X)$, $V(X)$, puis en déduire $E(X^2)$ et $E(Y)$.

4. Exemple 2 : On suppose que : $X \sim U(0;1;2;3;4)$, CàD la VA X suit la loi uniforme sur $\{0,1,\ldots,4\}$.
   Rappeler l'expression de p_k.
   Donner les valeurs de $e = E(X)$, $V(X)$, puis en déduire $E(X^2)$ et $E(Y)$.

Exercice 2. [Correction]
Dans tout le problème, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée,
c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de pile et de face sont équiprobables.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par
> R_n l'événement pile apparaît au lancer de rang n
> S_n l'événement face apparaît au lancer de rang n

L'objectif de l'exercice est d'étudier le temps d'attente de la première configuration "pile, pile, face "

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un face précédé de deux piles si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.
Par exemple : si les premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, face, pile, pile, face, ...), alors la V.A. Y prend la valeur 9.

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $c_n = \mathbf{P}([Y = n])$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note B_n l'événement $R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$ et U_n l'événement $\bigcup_{i=3}^{n} B_i$.

On pose $u_1 = u_2 = 0$, et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_n = \mathbf{P}(U_n)$.

1. Évènements

   Que signifie les évènements B_n et U_n ?

   Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles ?
2. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n. En déduire que la suite (u_n) convergente vers une limite $\ell \leqslant 1$
3. Montrer que : $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$.
   Exprimer l'événement U_{n+1} en fonction des événements U_n et B_{n+1}.
4. En déduire que : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.
5. En déduire que $\ell = 1$. Déterminer la probabilité de l'événement $[Y = 0]$.

Exercice 3. [Correction] On fixe un entier $n \geqslant 2$

On considère $(n+1)$ urne notée $U_0, U_1, ..., U_n$.
On suppose que l'urne U_k contient k boules soleils et $(n-k)$ boules nuits.
On choisit une urne au hasard et dans cette urne, on tire des boules avec remise
Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On considère l'événement

E_a : " J'ai effectué a tirages et j'ai obtenue a boules soleils".

Remarque :L'évènement E_a dépend de l'entier n car au départ il y a $(n+1)$ urnes.

1. Calcul de $\mathbb{P}(E_a)$
   (a) Montrer que : $\ell_n(a) = \mathbb{P}(E_a) = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^a$
   (b) Montrer que la suite $\left(\ell_n(a)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer $\ell(a)$ sa limite
2. Calcul de $\mathbb{P}_{E_a}(E_{a+1})$
   (a) Calculer $p_n = \mathbb{P}_{E_a}(E_{a+1})$ en fonction de $\ell_n(a+1)$ et $\ell_n(a)$
   (b) Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice 4. [Correction] On effectue une succession de n lancers d'une pièce équilibrée.

À chaque lancer, à partir du deuxième,

si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on gagne 1 euro.

Pour tout $n \geqslant 2$, on définit la variable aléatoire X_n égale au gain total à l'issue des n lancers.

Exemple avec $n = 6$ et voici la liste des 6 lancers : $PFPPFF$. On a alors $X_6 = 3$

Exemple avec $n = 11$ et voici la liste des 11 lancers : $PFPPFFFFPPF$. On a alors $X_{11} = 5$

Pour tout entier $i \geqslant 1$, on note P_i l'événement "obtenir pile lors du i-ème lancer"

et F_i l'événement "obtenir face lors du ième lancer". On a donc $P_i = \overline{F_i}$.

1. Exemples
   (a) Déterminer $X_2(\Omega)$ ainsi que la loi de X_2.
   (b) Déterminer $X_3(\Omega)$ ainsi que la loi de X_3.
2. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer $X_n(\Omega)$.

   Déterminer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n-1)$
3. Soit $n \geqslant 2$. On s'intéresse à la variable aléatoire X_{n+1} qui est à valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$.

   On note E l'événement "les côtés obtenus aux lancers n et $n+1$ sont les mêmes".

   On utilisant la formule de probabilité totale avec le système complet $\left(E, \overline{E}\right)$

   Montrer que : $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k-1)$
4. En déduire $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$. Calculer $E(X_n)$.

1. Exemples

   (a) On a $X_2(\Omega) = \{0,1\}$

   $> \mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}[(P_1 \cap P_2) \sqcup (F_1 \cap F_2)]$

   $= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2)$

   Les lancers sont indépendants

   $= \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

   $> \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}[(P_1 \cap F_2) \sqcup (F_1 \cap P_2)] = \frac{1}{2}$

   (b) On a $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

   $> \mathbb{P}(X_3 = 0) = \mathbb{P}[(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \sqcup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

   $> \mathbb{P}(X_3 = 2) = \mathbb{P}[(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \sqcup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)] = \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

   $> \mathbb{P}(X_3 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_3 = 0) - \mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{2}$

2. Soit $n \geqslant 2$. On a $X_n(\Omega) = \{0,1,...,(n-1)\}$.

   $> \mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}[(P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n) \sqcup (F_1 \cap F_2 \cap .. \cap F_2)] = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

   $> \mathbb{P}(X_n = n-) = \mathbb{P}[(P_1 \cap F_2 \cap ..\textit{alternance}) \sqcup (F_1 \cap P_2 \cap ...\textit{alternance}] = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

3. Soit $n \geqslant 2$ et $k \in \{1,...,n-1$. On a

   - $\mathbb{P}_E(X_n + 1 = k) = \mathbb{P}(X_n = k)$ car les lancers n et $n+1$ sont les mêmes donc les k changements se sont produit au cours des n premiers lancers.

   - $\mathbb{P}_{\overline{E}}(X_n + 1 = k) = \mathbb{P}(X_n = k-1)$ car les lancers n et $n+1$ sont différent donc au cours des n premiers lancers, il y a eu $k-1$ changements.

   On utilisant la formule de probabilité totale avec le système complet $\left(E, \overline{E}\right)$, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}_E(X_n + 1 = k) + \mathbb{P}(\overline{E})\mathbb{P}_{\overline{E}}(X_n + 1 = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k-1)$$

4. Pour tout $n \geqslant 2$, on note G_n le série génératrice associée à X_n définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n = k)\, t^k$$

   (a) Pour tout t, on a avec la question Q1.

$$G_2(t) = \underbrace{{}^1/_2\ t^0}_{k=0} + \underbrace{{}^1/_2\ t^1}_{k=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$$

$$G_3(t) = \underbrace{{}^1/_4\ t^0}_{k=0} + \underbrace{{}^1/_2\ t^1}_{k=1} + + \underbrace{{}^1/_4\ t^2}_{k=2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right)^2$$

(b) On a $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(t) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_{n+1} = k)\, t^k \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0)\, t^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n+1} = k)\, t^k + \mathbb{P}(X_{n+1} = n)\, t^n \\
&\textit{On utilise Q2 et Q3} \\
&= \frac{1}{2^n} t^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k-1) \right] t^k + \frac{1}{2^n}\, t^n \\
&\textit{Or } \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 0) \textit{ et de même } \mathbb{P}(X_{n+1} = n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = n-1) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k)\, t^k}_{=1/2\ G_n(t)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k-1)\, t^k + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = n-1)\, t^n \\
&= \frac{1}{2}\, G_n(t) \qquad\qquad + \sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = p)\, t^{p+1} + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = n-1)\, t^n \\
&= \frac{1}{2}\, G_n(t) \qquad\qquad + t\frac{1}{2}\, G_n(t) \\
&= \frac{1+t}{2} G_n(t)
\end{aligned}$$

(c) On a donc $G_n(t) = \dfrac{1+t}{2} G_{n-1}(t) = \cdots = \left(\dfrac{1+t}{2}\right)^{n-1}$

Ainsi

$$\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, (n-1)\},\ \mathbb{P}(X_n = k) = \text{coef de } t^k \text{ dans } G_n(t) = \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^{n-1}} \text{ ainsi } X_n \sim \mathscr{B}(n-1; \tfrac{1}{2})$$

$$E(X_n) = G_n'(1) = \frac{n-1}{2^n} 2^{n-1} = \frac{n-1}{2}.$$

Comme $X_n \sim \mathscr{B}(n-1; \frac{1}{2})$ ainsi $E(X_n) = \frac{n-1}{2}$ et $V(X_n) = \frac{n-1}{4}$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1.

(a) N_k, le nombre d'enfants appartenant à une famille de k enfants, vaut par définition $k.M_k$ et $p_k = \dfrac{M_k}{M}$,

donc $N_k = k.p_k.M$

(b) On a $N = \sum_{k=0}^{41} N_k = \sum_{k=0}^{41} k.p_k.M = M \underbrace{\sum_{k=0}^{41} k.P(X=k)}_{=E(X)=e} = M\,e$

(c) le nombre q_k, la proportion d'enfants issus d'une famille à k enfants, vaut par définition $\dfrac{N_k}{N}$

Donc $q_k = \dfrac{N_k}{N} = \dfrac{k.p_k.M}{e\,M} = \dfrac{k\,p_k}{e}$.

2. On choisit un élève de l'école au hasard et on lui demande le nombre d'enfants dans sa famille.
On note Y ce nombre d'enfants.

(a) On a $\forall\, k \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(Y=k) = q_k = \dfrac{k\,p_k}{e}$

Comme $q_k \neq p_k$, non ce n'est pas la même loi

(b) On a $E(Y) = \sum_{k=1}^{41} k\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{41} k\,\dfrac{k\,p_k}{e}$.

$$= \frac{\sum_{k=1}^{41} k^2\,p_k}{e} = \frac{E(X^2)}{E(X)} \quad \text{car } e = E(X)$$

De plus $E(Y) - E(X) = \dfrac{E(X^2)}{E(X)} - E(X) = \dfrac{E(X^2) - E(X)^2}{E(X)} = \dfrac{V(X)}{E(X)}$

Comme la variance $V(X)$ est toujours $\geqslant 0$ et ici $e = E(X)$ car le nombre d'enfant c'est toujours $\geqslant 0$,

On a bien $E(Y) - E(X) \geqslant 0$

C'est tout à fait normal : les familles nombreuses apportant plus d'enfants à la communauté, on a une probabilité plus grande quand on choisit un enfant au hasard de tomber sur un enfant de famille nombreuse, ce qui augmente l'espérance.

3. On sait que $X(\Omega) = \{0,1,...,10\}$ et pour $k \in X(\Omega)$ de $p_k = \mathbb{P}(X=k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}$.

De plus $E(X) = 10.\dfrac{1}{5} = 2$, $V(X) = 10.\dfrac{1}{5}.\dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{5}$

D'après la formule de Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

donc $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \dfrac{8}{5} + 4 = \dfrac{28}{5}$

On a donc $E(Y) = \dfrac{28/5}{2} = \dfrac{14}{5} > 2 = E(X)$

4. Lorsque $X \sim U(0;1;2;3;4)$, on a

> $\forall\, k \in \{0,1,..,4\}$, $\mathbb{P}(X=k) = 1/5$

> $E(X) = \sum_0^4 k\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{5}(0+1+2+3+4) = 2$

> $E(X^2) = \sum_0^4 k^2\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{5}(0^2+1^2+2^2+3^2+4^2) = \dfrac{30}{5} = 6$

et $Y(Y) = \dfrac{E(X^2)}{E(X)} = \dfrac{6}{2} = 3 > 2 = E(X)$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. L'événement U_n signifie : J'ai obtenu au moins une fois "face,face,pile" au cours de n premiers lancers.
2. il est clair que $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ ainsi : Pour $n \geqslant 3$, $U_n \subset U_{n+1}$.
   Ainsi $u_n = \mathbb{P}(U_n) \leqslant \mathbb{P}(U_{n+1}) = u_{n+1}$, la suite est donc croissante (à partir du rang 3).

   De plus, u_n est une probabilité donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 1$

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \leqslant 1$
3. Les petites valeurs de u_n
   (a) Les lancer sont indépendants donc
   $$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n) = \mathbb{P}(R_{n-2})\mathbb{P}(R_{n-1})\mathbb{P}(S_n) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$
   (b) On a
   $$B_n \cap B_{n+1} = (R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n) \cap (R_{n-1} \cap R_n \cap S_{n+1}) = \varnothing \quad car\ S_n \cap R_n = \varnothing$$
   Donc les événements B_n et B_{n+1} sont incompatibles

   On fait de même pour les autres.
   (c) Comme les événements B_3 et B_4 et B_5, on a
   $$\begin{aligned} u_3 &= \mathbb{P}(B_3) = {}^1/_8 \\ u_4 &= \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4) = {}^1/_4 \\ u_5 &= \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4) + \mathbb{P}(B_5) = {}^3/_8 \end{aligned}$$
4. Soit n un entier n supérieur ou égal à 5.
   (a) On a
   $$\begin{aligned} U_n \cap B_{n+1} &= \left(\bigcup_{i=3}^{n} B_i\right) \cap B_{n+1} \\ &= \Big(U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n\Big) \cap B_{n+1} \\ &\qquad \textit{Loi de Morgan} \\ &= (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1}) \\ &= U_{n-2} \cap B_{n+1} \qquad \text{car les événements } B_{n-1},\ B_n \text{ et } B_{n+1} \text{ sont incompatibles} \end{aligned}$$
   De plus les lancers étant indépendants, les événements U_{n-2} et B_{n+1} sont indépendants et on a
   $$\mathbb{P}\Big(U_n \cap B_{n+1}\Big) = \mathbb{P}\Big(U_{n-2} \cap B_{n+1}\Big) = \mathbb{P}\Big(U_{n-2}\Big)\mathbb{P}\Big(B_{n+1}\Big) = \frac{1}{8}\,u_{n-2}$$
   (b) Justifier l'égalité des événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et préciser leur probabilité.
   (c) On a $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$, ainsi
   $$\begin{aligned} u_{n+1} = \mathbb{P}(U_{n+1}) &= \mathbb{P}\Big(U_n \cup B_{n+1}\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(U_n\Big) + \mathbb{P}\Big(B_{n+1}\Big) - \mathbb{P}\Big(U_n \cap B_{n+1}\Big) \\ &= u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_{n-2} \\ &= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \end{aligned}$$
   On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et que $\forall\, n,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$
   Alors à la limite quand $n \to \infty$, l'égalité devient
   $$\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell) \implies \ell = 1$$
   Conclusion le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

   Interprétation : Quand $n \to \infty$, il est certain que la séquence "face,face,pile" apparaissent.
   L'événement $Y = 0$, CàD la séquence "face,face,pile" n'apparait jamais, est donc impossible.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Autour de $\mathbb{P}(E_a)$

   (a) Sachant A_k, on est de devant l'urne U_k et on tire des boules avec remise, ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{A_k}(E_a) &= \mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_a)\\ &\textit{Il y a remise donc les tirages sont indépendants}\\ &= \mathbb{P}(S_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(S_a) = \left(\frac{k}{n}\right)^a\end{aligned}$$

   Avec la formule des probabilité totale avec le système complet $(A_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, on a

$$\mathbb{P}(E_a) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_{A_k}(E_a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)^a$$

   (b) On a

$$\mathbb{P}(E_a) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ avec } f : t \longmapsto t^a$$

   Comme la fonction f est continue sur $[0,1]$, on sait (thm admis) que

$$\ell_n(a) = \mathbb{P}(E_a) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 t^a\,dt = \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1} = \ell(a)$$

2. Autour de $\mathbb{P}_{E_a}(E_{a+1})$

   (a) On a $p_n = \mathbb{P}_{E_a}(E_{a+1}) = \dfrac{\mathbb{P}(E_a \cap E_{a+1})}{\mathbb{P}(E_a)}$

   De plus $\mathbb{P}(E_a) = \ell_n(a)$ et $\mathbb{P}(E_a \cap E_{a+1}) = \mathbb{P}(E_{a+1}) = \ell_{n+1}(a+1)$

   (b) Donc on a

$$p_n = \frac{\ell_{n+1}(a)}{\ell_n(a)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ell(a+1)}{\ell(a)} = \frac{1/a+1}{1/a} = \frac{a}{a+1}$$