Programme de colle de la semaine 29

du Lundi 12 Mai au Vendredi 16 Mai.

Questions de cours.

> Définition du produit scalaire.

Savoir démontrer que $< u, v >= \overrightarrow{U}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \overrightarrow{V}$ ou $< MN >= tr\left(M^T N\right)$ ou $< f, g >= \int fg$ est un produit scalaire.

> Cauchy-Schwarz.

Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

> Famille orthogonale. Soit les fonction $f_k : x \longmapsto \cos(kx)$ avec $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

Montrer que la famille $\left(f_n\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$

En déduire que la famille est libre.

> Propriétés des Bons.

Définition de BON.

La pèche des coordonnées d'un vecteur dans une BON.

Norme d'un vecteur en fonction de ses coordonnées dans une BON.

Produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs coordonnées dans une BON.

> Orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Savoir décrire l'algorithme de Gram-Schmidt.

Énoncer du théorème théorique, CàD avec la matrice de changement de base.

> L'orthogonale.

Définition de $F^\perp$, l'orthogonal d'un ssev F.

Démonstration de $F^\perp$ est un ssev.

Démonstration de $F \cap F^\perp = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. En déduire que : $\dim\left(F^\perp\right) \leqslant \dim(E) - \dim(F)$

> L'orthogonale.

Définition de F^T, l'orthogonal d'un ssev F.

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble de matrice symétrique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}$ l'ensemble de matrice anty-symétrique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Donner la définition et les dimensions de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$.

Démontrer que : $\mathscr{S}^\perp = \mathscr{A}$

> Projection-Symétrie orthogonale.

Définition de p la projection orthogonale sur le ssev F

On suppose que $F = vect(\underbrace{(1,2,3)}_{\overrightarrow{A}}, \underbrace{(4,5,6)}_{\overrightarrow{B}})$. Calculer $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$ puis déterminer $p\left(\overrightarrow{u}\right)$.

> Distance

Définition de $d\left(\overrightarrow{u}, F\right)$ la distance de d'un vecteur à un ssev.

Interpréter $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2 dt\right]$ en terme de distance, CàD dire qui est E, $\langle \odot, \odot \rangle$, $\overrightarrow{u}$ et F.

Exercices

Des exercices sur les produits scalaires.

Voir page suivante

Exercices intéressants. À réserver à : Amorim, Baptiste, Baracan, Bonfils ?, Brimont, Carrel, Chassaing, Garcia, Kerlerou, Nivet, Plante, Provenchère, Tregoat, Tripier.

Exercice 1. [Correction] On munit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels du produit scalaire $\langle \odot, \odot \rangle$, défini par : pour tout polynôme P et Q de $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, ...)$ de $\mathbb{R}[X]$. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, P_2, ...)$ avec :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \text{ la matrice de passage } \mathscr{M}at\Big(\{1, X, ..., X^k\} \rightsquigarrow \{P_0, P_1, P_2, ..., P_k\}\Big) \text{ triangulaire sup avec non nul sur diag.}$$

1. Calculer P_0 et P_1.
2. Démontrer que le polynôme P_n est de degré n.
3. Justifier que pour $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Le polynôme XP_n est est de degré $n+1$.

   Justifie que XP_n se décompose sur $Vect\{P_0, P_1, P_2, ..., P_{n+1}\}$
   Justifier que que les coordonnées selon $P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-2}$ sont nuls
   En déduire que : il existe a, b, c tel que : $P_{n+1} = aXP_n + bP_n + cP_{n-1}$

Exercice 2. On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec le produit scalaire $\langle M, N \rangle = tr\left(M^T N\right)$
On note $\mathscr{S}$ l'ensemble de matrice symétrique et $\mathscr{A}$ l'ensemble de matrice anty-symétrique

$$\text{On admet que } \mathscr{S}^{\perp} = \mathscr{A}$$

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice.

1. Déterminer, avec une analyse/synthèse, deux matrices $S \in \mathscr{S}$ et $A \in \mathscr{A}$ tel que $M = S + A$

   Ces matrices sont-elles unique ?
2. Justifier que $d(M, \mathscr{S}) = \|A\| =$ À expliciter.