Exercice 1. [Correction] **Développement en série de la cotangente**

Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on note $C(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$, où $\operatorname{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.

Partie I. Étude la fonction C

1. Montrer que la fonction C est bien définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\mathscr{C}^\infty$, impaire, et qu'elle est 1-périodique.
2. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

   Montrer que $\dfrac{x}{2}$ et $\dfrac{x+1}{2}$ sont encore dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

   Puis montrer que $C\left(\dfrac{x}{2}\right) + C\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2C(x)$.
3. Montrer que l'expression $C(x) - \dfrac{1}{x} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$.

   Rappel : Pour obtenir la limite d'une expression fabriquée avec les fonctions usuelles, un équivalent suffit
   Et pour trouver rapidement un équivalent, on commence par FFB.

Partie II. Définition de la fonction S

1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{2x}{x^2-k^2}$ est bien définie et qu'elle est convergente.

   Dans la suite, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on pose $S(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-k^2}$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

   Comparer $S_n(-x)$ et $S_n(x)$. En déduire que S est impaire.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}$.
   (b) En déduire que $S_n(x+1) - S_n(x) = \dfrac{1}{x+n+1} - \dfrac{1}{x-n}$.
   (c) Justifier que la fonction S est 1-périodique.
4. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

   Justifier que $1 - x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et déduire des questions précédente que $S(1-x) = -S(x)$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
   (a) En utilisant la formule de la question II-3.a, montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$S_n\left(\frac{x}{2}\right) + S_n\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S_{2n}(x) + \frac{2}{x+2n+1}$$

   (b) En déduire que $S\left(\dfrac{x}{2}\right) + S\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2S(x)$.

Partie III. Continuité de la fonction S

1. Soient a, x deux éléments de $]0,1[$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, avec $k \geqslant 2$. Montrer que $0 \leqslant \dfrac{1}{k^2 - x^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2-1}$.
   (b) Pour $n \geqslant 2$, justifier que
   $$\left|\sum_{k=2}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2a}{a^2-k^2}\right| \leqslant 2|x-a| \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2+1}{\left(k^2-1\right)^2}$$
   (c) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2+1}{\left(k^2-1\right)^2}$ converge

   En déduire que $\displaystyle |S(x)-S(a)| \leqslant \left|\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2-1}\right| + 2|x-a| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2+1}{\left(k^2-1\right)^2}$

   (d) Justifier enfin que la fonction S est continue sur $]0,1[$, puis qu'elle l'est sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

2. Comportement en 0.
   (a) En reprenant la définition initiale de S (Début de la partie II),

   montrer que pour $x \in]0,1[$, $\displaystyle \left|S(x) - \frac{1}{x}\right| \leqslant 2x \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}$.

   (b) En déduire que $S(x) - \dfrac{1}{x} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0^+$.

Partie IV. On va montrer que $C = S$.

Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on note $f(x) = C(x) - S(x)$.

Comme les fonctions C et S sont définies sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, continues, impaires

qu'elles sont 1-périodique et qu'elles vérifient la relation $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z},\ h\left(\dfrac{x}{2}\right) + h\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2h(x)$.

Alors il en est de même pour la fonction f. `On l'admet`

1. Propriétaires de f.
   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
   (b) En déduire que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

2. On note encore f le prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}$ tout entier.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1], f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$.
   (b) Justifier que f possède un maximum M sur $[0,1]$ et qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f\left(x_0\right) = M$.
   (c) Montrer que $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = M$, puis que pour tout $k \in \mathbb{N}, f\left(\dfrac{x_0}{2^k}\right) = M$.
   (d) En déduire que $f(0) = M$. Que dire alors du signe de f sur $[0,1]$?
   (e) Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on a $C(x) = S(x)$,

soit encore $\displaystyle \pi \operatorname{cotan}(\pi x) = \pi \frac{\cos(\pi\, x)}{\sin(\pi\, x)} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-k^2}$ (EULER, 1748).

Solution de l'exercice 1 **(Énoncé)**

Partie I. Étude la fonction C

1. Montrer que la fonction C est bien définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\mathscr{C}^{\infty}$, impaire, et qu'elle est 1-périodique.

   Le nombre $C(x)$ se calcule Ssi $\sin(\pi x) \neq 0$ Ssi $x \notin \mathbb{Z}$

   De plus $C(x)$ est fabriqué avec les fonctions usuelles

   Conclusion : la fonction C est bien définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\mathscr{C}^{\infty}$.

   Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a

   $C(-x) = \cdots = -C(x)$ et $C(x+1)\cdots = C(x)$, donc la fonction C est impaire, et qu'elle est 1-périodique.

2. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

   Montrer que $\dfrac{x}{2}$ et $\dfrac{x+1}{2}$ sont encore dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

   On fait un RA. On suppose $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $\dfrac{x}{2} \in \mathbb{Z}$,

   Comme $\dfrac{x}{2} \in \mathbb{Z}$, alors $\dfrac{x}{2} = p \in \mathbb{Z}$ donc $x = 2p \in \mathbb{Z}$ OUPS ! ! !

   de même pour l'autre.

   Puis montrer que $C\left(\dfrac{x}{2}\right) + C\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2C(x)$.

   Calcul trigo

3. Montrer que l'expression $C(x) - \dfrac{1}{x} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$.

   On a $C(x) - \dfrac{1}{x} = \pi\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi x\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)}$

   De plus
   $$\begin{aligned}\pi x\cos(\pi x) - \sin(\pi x) &= \pi x\left[1 - \frac{(\pi x)^2}{2!} + o(x^2)\right] - \left[(\pi x) - \frac{(\pi x)^3}{3!} + o(x^3)\right] \\ &= x\left[\pi - \pi\right] + x^3\left[\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{6}\right] + o(x^3) \\ &= \frac{\pi^3}{3}x^3\left[1 + o(1)\right]\end{aligned}$$

   Conclusion : $C(x) - \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\frac{\pi^3}{3}x^3\left[1+o(1)\right]}{x.x[1+o(1)]} = \dfrac{\pi^3}{3}\,x\left[1+o(1)\right] \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

Partie II. Définition de la fonction S

1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{2x}{x^2-k^2}$ est bien définie et qu'elle est convergente.

   Comme $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on a bien $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ x^2 - k^2 \neq 0$.

   ET $\dfrac{2x}{x^2-k^2} \underset{k\to\infty}{\sim} \dfrac{-2x}{k^2}$ et $\dfrac{1}{k^2}$ est le terme d'une série positive de référence qui converge

   Conclusion : la série est bien définie et elle est converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

   Comparer $S_n(-x)$ et $S_n(x)$. En déduire que S est impaire.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on a $S_n(-x) = -S_n(x)$

   Et avec le théorème "À la limite"

   $$\left.\begin{array}{r}S_n(-x) = -S_n(x) \\ S_n(-x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S(-x) \\ -S_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -S(x)\end{array}\right\} \implies S(-x) = -S(x)$$

   Conclusion : la fonction S est impaire.

3. On a $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{x+k}=\sum_{k=-n}^{-1}\frac{1}{x+k}+\underbrace{{}^{1}/_{x}}_{k=0}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k}$

$$=\sum_{k'=1}^{n}\frac{1}{x-k'}+\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k}$$
$$=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x-k}\right]$$
$$=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2x}{x^2-k^2}\right]=S_n(x)$$

Ainsi $\displaystyle S_n(x+1)-S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{x+1+k}-\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{x+k}$

$$=\sum_{k'=-n+1}^{n+1}\frac{1}{x+k'}-\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{x+k}$$
$$=\underbrace{\frac{1}{x+n+1}}_{k=n+1}-\underbrace{\frac{1}{x-n}}_{k=-n}$$

Enfin avec le théorème "À la limite", on a

$$\left.\begin{array}{r}S_n(x+1)-S_n(x)=\dfrac{1}{x+n+1}-\dfrac{1}{x-n}\\ S_n(x+1)-S_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}S(x+1)-S(x)\\ \dfrac{1}{x+n+1}-\dfrac{1}{x-n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0-0=0\end{array}\right\}\Longrightarrow S(x+1)-S(x)=0$$

Conclusion : la fonction S est 1-périodique.

4. Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Justifier que $1-x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et déduire des questions précédente que $S(1-x)=-S(x)$.

5. Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

(a) montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n\left(\frac{x}{2}\right)+S_n\left(\frac{x+1}{2}\right)=2S_{2n}(x)+\dfrac{2}{x+2n+1}$

On a $\displaystyle S_n\left(\frac{x}{2}\right)+S_n\left(\frac{x+1}{2}\right)=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{\frac{x}{2}+k}+\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{\frac{x+1}{2}+k}$

$$=\sum_{k=-n}^{n}\frac{2}{x+2k}+\sum_{k=-n}^{n}\frac{2}{x+2k+1}$$
$$=\sum_{p=-2n,pair}^{2n}\frac{2}{x+p}+\sum_{p=-2n,impair}^{2n}\frac{2}{x+p}+\underbrace{\frac{2}{x+2n+1}}_{k=n}$$
$$=2\sum_{p=-2n,tous}^{2n}\frac{1}{x+p}+\frac{2}{x+2n+1}$$
$$=2S_{2n}(x)+\frac{2}{x+2n+1}$$

(b) En déduire que $S\left(\frac{x}{2}\right)+S\left(\frac{x+1}{2}\right)=2S(x)$.

Avec le théorème "À la limite", on a

$$\left.\begin{array}{r}S_n\left(\frac{x}{2}\right)+S_n\left(\frac{x+1}{2}\right)=2S_{2n}(x)+\dfrac{2}{x+2n+1}\\ S_n\left(\frac{x}{2}\right)+S_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}S\left(\frac{x}{2}\right)+S\left(\frac{x+1}{2}\right)\\ 2S_{2n}(x)+\dfrac{2}{x+2n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}2S(x)+0\end{array}\right\}\Longrightarrow\ \ldots\ldots$$

Conclusion : Pour tout $x\in\mathscr{D}$, $S\left(\frac{x}{2}\right)+S\left(\frac{x+1}{2}\right)=2S(x)$.

Partie III. Continuité de la fonction S

1. Soient a, x deux éléments de $]0,1[$.

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, avec $k \geqslant 2$. Montrer que $0 \leqslant \dfrac{1}{k^2-x^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2-1}$.

   (b) Pour $n \geqslant 2$, justifier que $\left|\sum_{k=2}^{n} \dfrac{2x}{x^2-k^2} - \sum_{k=2}^{n} \dfrac{2a}{a^2-k^2}\right| \leqslant 2|x-a| \sum_{k=2}^{n} \dfrac{k^2+1}{\left(k^2-1\right)^2}$

$$\text{On a } \left|\sum_{k=2}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2a}{a^2-k^2}\right| = \left|\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{2x}{x^2-k^2} - \frac{2a}{a^2-k^2}\right]\right|$$
$$= 2\left|\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{x\left(a^2-k^2\right)-a\left(x^2-k^2\right)}{\left(x^2-k^2\right)\left(a^2-k^2\right)}\right]\right|$$

Or on a $x\left(a^2-k^2\right)-a\left(x^2-k^2\right)=(x-a)(ax-k^2)$

$$= 2\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{(x-a)(ax-k^2)}{\left(x^2-k^2\right)\left(a^2-k^2\right)}\right|$$
$$\leqslant 2\sum_{k=2}^{n}\left|\frac{(x-a)(ax-k^2)}{\left(x^2-k^2\right)\left(a^2-k^2\right)}\right|$$
$$\leqslant 2|x-a|\sum_{k=2}^{n}\frac{|a|\,|x|+k^2}{\left(k^2-x^2\right)\left(k^2-a^2\right)}$$
$$\leqslant 2|x-a|\sum_{k=2}^{n}\frac{1+k^2}{\left(k^2-1\right)\left(k^2-1\right)}$$

   (c) Justifier que la série $\sum_{k=2}^{+\infty} \dfrac{k^2+1}{\left(k^2-1\right)^2}$ converge

Comme $\dfrac{k^2+1}{\left(k^2-1\right)^2} \underset{k\to\infty}{\sim} \dfrac{k^2}{k^4} = \dfrac{1}{k^2}$ et et $\dfrac{1}{k^2}$ est le terme d'une série positive de référence qui converge

Conclusion : la série est bien définie et elle est converge.

En déduire que $|S(x)-S(a)| \leqslant \left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{2a}{a^2-1}\right| + 2|x-a|\sum_{k=2}^{+\infty}\dfrac{k^2+1}{\left(k^2-1\right)^2}$

$$\text{On a } |S_n(x)-S_n(a)| = \left|\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2x}{x^2-k^2}-\frac{1}{a}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2a}{a^2-k^2}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{a}-\frac{2a}{a^2-1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2x}{x^2-k^2}-\sum_{k=2}^{n}\frac{2a}{a^2-k^2}\right|$$
$$\leqslant \left|\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{a}-\frac{2a}{a^2-1}\right| + \left|\sum_{k=2}^{n}\frac{2x}{x^2-k^2}-\sum_{k=2}^{n}\frac{2a}{a^2-k^2}\right|$$
$$\leqslant \left|\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{a}-\frac{2a}{a^2-1}\right| + 2|x-a|\sum_{k=2}^{n}\frac{1+k^2}{\left(k^2-1\right)^2}$$

Avec le théorème 'À la limite', on obtient l'inégalité demandée.

   (d) Justifier enfin que la fonction S est continue sur $]0,1[$, puis qu'elle l'est sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Le théorème de la distance assure que $S(x) \xrightarrow[x\to a]{} S(a)$ donc la fonction est continue en $x=a$

c'est vraie pour tout $a \in]0,1[$,

conclusion : la fonction S est continue sur $]0,1[$ et sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ (car 1-périodique)

2. Comportement en 0.

   (a) Montrer que pour $x \in]0,1[$, $\left|S(x)-\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 2x\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2-1}$.

Pour $x \in]0,1[$, on a $\left|S_n(x) - \dfrac{1}{x}\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2x}{x^2-k^2}\right|$

$$\begin{aligned} &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{2x}{x^2-k^2}\right| \\ &\leqslant 2x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2-x^2} \\ &\leqslant 2x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2-1} \end{aligned}$$

La série $\left(\sum \dfrac{1}{k^2-1}\right)$ converge et avec le théorème 'À la limite', on obtient l'inégalité demandée.

(b) En déduire que $S(x) - \dfrac{1}{x} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0^+$.

Avec le théorème de la distance, on a la limite.

Partie IV. On va montrer que $C = S$.

Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on note $f(x) = C(x) - S(x)$.

Comme les fonctions C et S sont définies sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, continues, impaires

qu'elles sont 1-périodique et qu'elles vérifient la relation $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z},\ h\left(\dfrac{x}{2}\right) + h\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2h(x)$.

Alors il en est de même pour la fonction f. `On l'admet`

1. Propriétaires de f.

(a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Quand $x \longrightarrow 0^+$,

on a $f(x) = C(x) - S(x) = C(x) - \dfrac{1}{x} - \left[S(x) - \dfrac{1}{x}\right] \longrightarrow O - O = O$

À cause l'imparité, on a aussi $f(x) \longrightarrow O - O = O$, quand $x \longrightarrow 0^-$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

(b) En déduire que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, la fonction f se prolonge par continuité en $x = 0$ avec $f(0) = 0$.

De plus elle est 1-périodique, donc la fonction f se prolonge par continuité en $x = p \in \mathbb{Z}$ avec $f(p) = 0$.

Conclusion : la fonction f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$.

2. On note encore f le prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}$ tout entier.

(a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$.

$>$ Pour $x \in]0,1[$, on a $f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = C\left(\dfrac{x}{2}\right) + C\left(\dfrac{x+1}{2}\right) - S\left(\dfrac{x}{2}\right) + S\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$

$= 2C(x) - 2S(x) = 2f(x)$

$>$ Pour $x = 0$, on a $f\left(\dfrac{0}{2}\right) + f\left(\dfrac{0+1}{2}\right) = f\left({}^1/_2\right)$

Pour calculer $f\left({}^1/_2\right)$, on utilise la question II.4 avec $x = {}^1/_2$; ainsi on a $f\left({}^1/_2\right) = -f\left(1 - {}^1/_2\right)$

Donc $f\left({}^1/_2\right) = 0$ et on a bien $f\left(\dfrac{0}{2}\right) + f\left(\dfrac{0+1}{2}\right) = f\left({}^1/_2\right) = 0 = 2f(0)$

$>$ Enfin pour $x = 1$, on utilise la 1-périodicité

Conclusion : la relation $f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$ est valide sur $[0,1]$

(b) Justifier que f possède un maximum M sur $[0,1]$ et qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = M$.

La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ donc ......

(c) Montrer que $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = M$

On fait un RA. On suppose que $f\left(\frac{x_0}{2}\right) \neq M$

Comme M est le maximum, on a $f\left(\frac{x_0}{2}\right) \underset{strict}{<} M$ et $f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \leqslant M$, ainsi

$$2M = 2f(x_0) = \underbrace{f\left(\frac{x_0}{2}\right)}_{<M} + \underbrace{f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)}_{\leqslant M} \underset{strict}{<} M + M = 2M$$

Ainsi $2M \underset{strict}{<} 2M$ OUPS !!!

puis que pour tout $k \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^k}\right) = M$.

Récurrence

(d) En déduire que $f(0) = M$. Que dire alors du signe de f sur $[0,1]$?

Avec le théorème "À la limite", on a

$$\left.\begin{array}{c} \forall k \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^k}\right) = M \\ f\left(\frac{x_0}{2^k}\right) \longrightarrow f(0) \textit{ car } f \textit{ est continue} \\ M \longrightarrow M \end{array}\right\} \Longrightarrow M = f(0) = 0$$

Comme M est le maximum sur $[0,1]$, on a la fonction f est négative sur $[0,1]$

(e) Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

On fait le même raisonnement avec m le minimum de f sur $[0,1]$, ainsi $m = f(0) = 0$ et la fonction f est positive sur $[0,1]$

Conclusion : la fonction f est positive et négative donc nulle sur $[0,1]$
De plus elle est 1-périodique donc elle est nulle sur $\mathbb{R}$.