Cahier de calculs.

1 QCM

Exercice 1.

Recopier et remplacer les ? afin que les égalités soient vraies.
Les nombres placés dans les ? ne sont forcément égaux et peuvent être négatifs.

Exemple : $\forall x\in\mathbb{C},\ 2x-3=?\,(x+?)$, vous devez écrire $\forall x\in\mathbb{C},\ 2x-3=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$

$\forall\ x\in\mathbb{C}-\{7/5\},\quad \dfrac{2x+3}{5x-7}=?\dfrac{x+?}{x+?}$

$\forall\ x\in\mathbb{C}-\{7/5\},\quad \dfrac{2x+3}{5x-7}=?\dfrac{1+?.x}{1+?.x}$

$\forall\ x\in\mathbb{C}-\{3/2\},\quad \dfrac{3x+5}{2x-3}=\dfrac{?.(2x-3)+?}{2x-3}$

$\forall\ x\in\mathbb{C}-\{-1/3,0\},\quad \dfrac{2x+1}{3x+1}=?\dfrac{1+\frac{?}{x}}{1+\frac{?}{x}}$

$\forall\ x\in\mathbb{R}-\{-3/2\},\quad \dfrac{2}{(2x+3)^2}=\dfrac{?}{(x+?)^2}$

$\forall\ x\in\mathbb{R}-\{-3/2\},\quad \dfrac{2}{(2x+3)^2}=\dfrac{?}{(?.x+1)^2}$

$\forall\ x\in\mathbb{R},\quad \dfrac{(2x+1)^2}{\left(3x^2+1\right)^3}=?\dfrac{(x+?)^2}{\left(x^2+?\right)^3}$

$\forall\ x\in\mathbb{R},\quad \left(x^2+x^3\right)^3=x^?\left(1+x^?\right)^?$

$\forall\ x\in\mathbb{R}^*,\quad x^3+x=x^2\left(x^?+x^?\right)$

$\forall\ x\in\mathbb{R}-\{0\},\quad \left(\dfrac{x-2}{x^2+2}\right)^3=x^?\left(\dfrac{1-2x^{-1}}{1+2x^{-2}}\right)^3$

$\forall x\in\mathbb{R},\quad ?(x+2)+?(x+3)=0\,x+?$

$\forall x\in\mathbb{R},\quad ?(x+2)+?(x+3)=?\,x+0$

$\forall\ x\in[-3/2,+\infty[,\quad \sqrt{2x+3}=?\sqrt{x+?}$

$\forall\ x\in[-3/2,+\infty[,\quad \sqrt{2x+3}=?\sqrt{1+?x}$

$\forall\ x\in\mathbb{R}^*,\quad \sqrt{x^4+4}=x^?\sqrt{1+\dfrac{4}{x^?}}$

$\forall\ x\in]0,+\infty[,\quad \sqrt{\dfrac{2x^2}{2x+1}}=\dfrac{?\times x^?}{\sqrt{x+?}}$

$\forall\ x\in]-1/2,0[,\quad \sqrt{\dfrac{2x^2}{2x+1}}=\dfrac{?\times x^?}{\sqrt{x+?}}$

Exercice 2.

1. À quoi est égal $\dfrac{4^{12}}{2^{25}}$

   ☐ $\dfrac{1}{2^{11}}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 2 ☐ 2^{11}

2. À quoi est égal $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

   ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ $\sqrt{2}^{2\sqrt{2}}$ ☐ ne se simplifie pas

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À quoi est égal $2^n + 2^n$

   ☐ 4^n ☐ 4^{n+1} ☐ 2^{n+1} ☐ 3^n

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. À quoi est égal $2^n \times 2^n$

   ☐ 2^{2n} ☐ 2^{2+n} ☐ $2^{(n^2)}$ ☐ 4^{2n}

5. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. À quoi est égal $2^n \times 3^p$

   ☐ 6^{np} ☐ 6^{n+p} ☐ 5^{n+p} ☐ ne se simplifie pas

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. À quoi est égal $(-1)^{-2n-1}$

   ☐ -1 ☐ 1 ☐ cela dépend de la parité de n

Exercice 3. Vrai ou faux.

Lorsque c'est Vrai, donner le domaine de validité. Lorsque c'est Faux donner la bonne formule

	V	F
$e^{x+y} = e^x\, e^y$	☐	☐
$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$	☐	☐
$e^{-x} = -e^x$	☐	☐
$e^{xy} = e^x + e^y$	☐	☐
$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$	☐	☐
$\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\ln(x)}$	☐	☐

	V	F
$\ln\left(\dfrac{1}{2}x\right) = \sqrt{\ln(x)}$	☐	☐
$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$	☐	☐
$\ln(e^{-2}) = -2$	☐	☐
$e^{\ln(5)} + e^{\ln(3)} = 8$	☐	☐
$e^{\ln(5)} + e^{-\ln(3)} = 2$	☐	☐
$\ln\left[(x^3+1)^2\right] = 2\ln(x^3+1)$	☐	☐
$\ln(e^x+1) = x + \ln(1+e^{-x})$	☐	☐

Exercice 4.

1. À quoi est égal $\ln(3^4)+\ln(3^2)-\ln(3^6)$

   ☐ 1 ☐ 0 ☐ e ☐ ne se simplifie pas

2. Soit $x>0$. À quoi est égal $\ln(x+1)-\ln(x)$

   ☐ $\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ ☐ $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ ☐ $-\ln(x)$ ☐ $\ln(1)$

3. Soit $x>0$. À quoi est égal $\sqrt{\ln(x)}$

   ☐ $\dfrac{1}{2}\ln(x)$ ☐ $\ln\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ ☐ $\ln(\sqrt{x})$ ☐ ne se simplifie pas

4. Soit $x>0$. À quoi est égal $\ln\left(x^{\frac{4}{3}}\right)$

   ☐ $\ln\left(\dfrac{4}{3}x\right)$ ☐ $\dfrac{4}{3}\ln(x)$ ☐ $\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)+\ln(x)$ ☐ $x\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

5. Soit $x\in\mathbb{R}$. À quoi est égal $\dfrac{1}{e^x}$

   ☐ $-e^x$ ☐ e^{-x} ☐ $e^{\frac{1}{x}}$ ☐ ne se simplifie pas

6. À quoi est égal $\ln(4)\times\ln(\sqrt{2})$

   ☐ $\ln(4+\sqrt{2})$ ☐ $\ln(4\sqrt{2})$ ☐ $\ln(2)$ ☐ $\ln^2(2)$

7. Soit $n\in\mathbb{Z}$. À quoi est égal $\ln(e^n)-2e+\ln(1)$

   ☐ e^n-2e+e ☐ e^n-2e ☐ $n-2e$ ☐ $n-2e+1$

8. À quoi est égal $\ln(2+\sqrt{3})+\ln(2-\sqrt{3})$

   ☐ 1 ☐ 0 ☐ 4

2 Factoriser

Exercice 5. [Correction] *Factoriser* et simplifier.

$$A = (x+1)(x+2) + (x-1)(2x-3) \qquad B = 1 - t - (t-1)(t-2)$$
$$C = (at+b)^2 - (at+b)(ax-2) \qquad D = \left(x^2-1\right) - 2(x+1)^2$$
$$E = \left(x^2+2x+1\right) - (2x-1)(x+1) \qquad F = \frac{1}{x} + x + 2\left(x^2+1\right)$$
$$G = t^{2n} - t^n \qquad H = (x+1)^{n+1} - (x+1)^n$$

Exercice 6. [Correction] Factoriser les expressions polynomiales suivantes.

1. $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$
2. $25 - (10x+3)^2$
3. $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$
4. $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$

3 Manipulations de fraction

Exercice 7. [Correction] Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

1. $\frac{2}{4}-\frac{1}{3}$
2. $\frac{2}{3}-0,2$
3. $\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times 5$
4. $-\frac{2}{15}\div(-\frac{6}{5})$

Exercice 8. [Correction] Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier $\geqslant 0$).

1. $\frac{32}{40}$
2. $8^3\times\frac{1}{4^2}$
3. $\frac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}$
4. $\frac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}}$

Exercice 9. [Correction] Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

1. $\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$ pour $n\neq 0,-1$
2. On rappelle la formule : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.
   Simplifier $\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $a\neq b$
3. $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$

Exercice 10. [Correction] Soit $t\neq -1$. On considère $A=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}$ et $B=\left(1+t^2\right)(1+t)^2$.
Simplifier AB autant que possible.

Exercice 11. [Correction] On rappelle les factorisations : $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$ et $x^2-1=(x-1)(x+1)$

Soit x un réel fixé (et tel que les expressions suivantes soient bien définie)
Simplifier les fractions puis réduire au même dénominateur et enfin simplifier au maximum l'expression.

1. $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}$
2. $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x^2-4}$
3. $\frac{x^2}{x^2-x}+\frac{x^3}{x^3+x^2}-\frac{2x^2}{x^3-x}$
4. $\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x^2-4}+\frac{2}{x^2-2x}$

4 Manipulation des puissances

Théorème 1. Formulaire autour de a^b.

> *Kulture* $(-1)^{pair} = 1$ et $(-1)^{impair} = -1$

> *Le Formulaire : 18h, 19h, 20h, 21h, 7h, 7h45*

$$a^{b+c} = a^b a^c$$
$$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c} \quad et/ou \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$
$$(ab)^c = a^c b^c$$

$$a^{b^c} \overset{def}{=} a^{(b^c)} = Rien$$
$$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$$
$$a^0 = 1$$

Exercice 12. [Correction] Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

$$10^5 \times 10^3, \quad (10^5)^3, \quad \frac{10^5}{10^3}, \quad \frac{10^{-5}}{10^{-3}}, \quad \frac{\left(10^5 \times 10^{-3}\right)^5}{\left(10^{-5} \times 10^3\right)^{-3}}, \text{ et } \frac{\left(10^3\right)^{-5} \times 10^5}{10^3 \times 10^{-5}}$$

Exercice 13. [Correction] Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

$$3^4 \times 5^4, \quad \left(5^3\right)^{-2}, \quad \frac{2^5}{2^{-2}}, \quad \frac{6^5}{2^5}, \quad \frac{\left(30^4\right)^7}{2^{28} \times 5^{28}} \text{ et } (-7)^3 \times (-7)^{-5}$$

Exercice 14. [Correction] Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \times 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

$$\frac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 2^8 \times 6^{-1}}, \quad 2^{21} + 2^{22}, \quad \frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}, \quad \frac{\left(3^2 \times (-2)^4\right)^8}{\left[(-3)^5 \times 2^3\right]^{-2}}$$

Exercice 15. [Correction] Exprimer en fonction de $a = 2^n$

$A = 2^{n+3}$ $\qquad B = 2^{2n+1}$ $\qquad C = 2^{-2n}$ $\qquad D = (-2)^{2n+3}$

$E = \dfrac{4^{n+1}}{2^{1-3n}}$ $\qquad F = 2^{n+3} - 2^{2n}$ $\qquad G = 8^{2n}$

Exercice 16. [Correction] On considère a, b deux complexes et n, m dans $\mathbb{Z}$.
Simplifier les complexes suivants. Les nombres a et b sont choisis afin que les dénominateurs ne s'annulent pas

$$A = \frac{(a^n)^3 + \left(a^2\right)^n}{1 + a^n} \qquad B = \frac{a^{n+m}.(a.b^n)^m}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^n.(a.b^m)^n} \qquad C = \left(a^2\right)^n . \frac{\left(1 + \frac{1}{b}\right)^n}{(a + ab)^n}$$

5 Exp-Ln

Théorème 2. Formulaire autour de exp et ln.

Je ne précise pas les domaines de définition/validité des formules

Pour exp on a les formules

$$\exp(a+b) = \ldots$$
$$\exp(a-b) = \ldots \text{ et } \exp(-a) = \ldots$$
$$\exp(ab) = \left(e^a\right)^b$$
$$\exp(0) = 1$$

Pour ln on a les formules

$$\ln(ab) = \ldots$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ldots \text{ et } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ldots$$
$$\ln\left(\square^\alpha\right) = \alpha \ln(\square)$$
$$\ln(1) = 0 \text{ et } \ln(e) = 1$$

Enfin il y a : $e^{\ln(a)} = a$ et $\ln\left(e^a\right) = a$ et $a^b = e^{b\ln(a)}$

Exercice 17. [Correction] **Manipulation des logarithmes**

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$$\ln 16, \quad \ln 512, \quad \ln(0,125), \quad \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{8}\right), \quad \ln(72) - 2\ln 3, \quad \ln 36$$

Exercice 18. [Correction] **Manipulation logarithme/Exponentielle**

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

$$e^{3\ln 2}, \quad \ln(\sqrt{e}), \quad \ln\left(e^{1/3}\right), \quad e^{-2\ln 3}, \quad \ln\left(e^{-1/2}\right), \quad e^{\ln 3 - \ln 2}$$

Exercice 19. [Correction] **Manipulation logarithme/Exponentielle suite**

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

$$-e^{-\ln\frac{1}{2}}, \quad e^{-\ln\ln 2}, \quad \ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right), \quad \ln\left(\sqrt{e^4}\right) - \ln\left(\sqrt{e^2}\right), \quad \ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right), \quad \exp\left(-\frac{1}{3}\ln\left(e^{-3}\right)\right)$$

Exercice 20. [Correction] On considère la fonction

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto \ln(1+x).$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes (pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.)

1. $f(2e^x - 1)$
2. $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$
3. $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$
4. $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$

Correction.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

$$\begin{aligned}
A &= (x+1)(x+2)+(x-1)(2x-3) = \textit{Rien à factoriser, on développe}\\
B &= 1-t-(t-1)(t-2) = \textit{On factorise } (t-1)\\
C &= (at+b)^2-(at+b)(ax-2) = \textit{On factorise } (at+b)\\
D &= \left(x^2-1\right)-2(x+1)^2 = \textit{On factorise } (x+1)\\
E &= \left(x^2+2x+1\right)-(2x-1)(x+1) = \textit{On factorise } (x+1)\\
F &= {}^1/_x + x + 2\left(x^2+1\right) = \frac{1+x^2+2x(x^2+1)}{x} = \textit{on factorise } (x^2+1)\\
G &= t^{2n}-t^n = \textit{On factorise } t^n\\
H &= (x+1)^{n+1}-(x+1)^n = \textit{On factorise } (x+1)^n
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. On remarque que : $36x^2-49=(6x)^2-7^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$\begin{aligned}
-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49 &= -(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2\\
&= -(6x+7)(6x-1)+(6x+7)(6x-7)\\
&= (6x+7)\left[-(6x-1)+(6x-7)\right]\\
&= -6(6x+7)
\end{aligned}$$

2. On remarque que : $25-(10x+3)^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$\begin{aligned}
25-(10x+3)^2 &= 5^2-(10x+3)^2\\
&= (5+(10x+3))(5-(10x+3))\\
&= (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)
\end{aligned}$$

3. On remarque que : $36x^2-64=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
   ainsi on trouve $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64=2(3x-4)(10x+3)$

4. On remarque que : $64x^2-64=64(x^2-1)=64(x+1)(x-1)$
   ainsi on trouve $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64=-8(x+1)(x+16)$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. $\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\times3}{4\times3}-\dfrac{1\times4}{3\times4}=\dfrac{6-4}{12}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$
2. On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}-0,2=\frac{2}{3}-\frac{2}{10}=\frac{2\times10}{3\times10}-\frac{2\times3}{10\times3}=\frac{14}{30}=\frac{7\times2}{15\times2}=\frac{7}{15}.$$

3. $\dfrac{36}{25}\times\dfrac{15}{12}\times5=\dfrac{36}{25}\times\dfrac{15}{12}\times\dfrac{5}{1}=\dfrac{36\times15\times5}{25\times12\times1}=\dfrac{12\times3\times5\times3\times5}{5\times5\times12\times1}=\dfrac{3\times3}{1}=\dfrac{9}{1}=9.$
4. $-\dfrac{2}{15}\div(-\dfrac{6}{5})=-\dfrac{2}{15}\times(-\dfrac{5}{6})=\dfrac{2}{15}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{2\times5}{15\times6}=\dfrac{2\times5}{3\times5\times2\times3}=\dfrac{1}{9}.$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

1. $\dfrac{32}{40}=\dfrac{8\times4}{8\times5}=\dfrac{4}{5}$
2. $8^3\times\dfrac{1}{4^2}=(2\times4)^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times4^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times4=2^5$
3. $\dfrac{27^{-1}\times4^2}{3^{-4}\times2^4}=\dfrac{(3^3)^{-1}\times(2^2)^2}{3^{-4}\times2^4}=\dfrac{3^4}{3^3}=3$
4. $\dfrac{(-2)^{2k+1}\times3^{2k-1}}{4^k\times3^{-k+1}}=\dfrac{(-2)\times(-2)^{2k}\times3^{2k}\times3^{-1}}{4^k\times3^{-k}\times3}=\dfrac{(-2)\times4^k\times3^{2k}\times3^k}{4^k\times3^2}=-2\times3^{3k-2}.$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

1.

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}$$
$$=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}$$
$$=\frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}.$$

2. On a

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(a-b)\left(ab+a^2+b^2\right)}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}$$
$$=\frac{ab+a^2+b^2}{a-b}-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}=-\frac{ab}{a-b}.$$

3. On a

$$\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}=\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2}$$
$$=\frac{6(n+1)}{2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2(n+1)}=\frac{3}{2}n.$$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

$$A=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{(1+t)^2}{\left(1+t^2\right)(1+t)^2}-\frac{1+t^2}{\left(1+t^2\right)(1+t)^2}$$
$$=\frac{1+2t+t^2-\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)(1+t)^2}$$
$$=\frac{2t}{\left(1+t^2\right)(1+t)^2}$$

$$\text{Ainsi on a } AB=\frac{2t}{\left(1+t^2\right)(1+t)^2}\times\left(1+t^2\right)(1+t)^2=2t$$

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x^2-1} &= \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}\\ &= \frac{[x^2+x]-[2x-2]-2}{(x+1)(x-1)}\\ &= \frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)}=\frac{x}{x+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x^2-4} &= \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{(x+2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{8}{(x+2)(x-2)}\\ &= \frac{(2x-4)-x-2+8}{(x+2)(x-2)}\\ &= \frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x^2-x}+\frac{x^3}{x^3+x^2}-\frac{2x^2}{x^3-x} &= \frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}\\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{2x}{(x+1)(x-1)}\\ &= \frac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)}\\ &= \frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x}{x+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x^2-4}+\frac{2}{x^2-2x} &= \frac{1}{x}+\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}+\frac{2}{x(x-2)}\\ &= \frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x(x-2)}\\ &= \frac{x-2}{x(x-2)}+\frac{x}{x(x-2)}+\frac{2}{x(x-2)}\\ &= \frac{2x}{x(x-2)}=\frac{2}{x-2}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 12 (Énoncé)

10^8, 10^{15}, 10^2, 10^{-2}, 10^4 et 10^{-8}

Solution de l'exercice 13 (Énoncé)

15^4, 5^{-6}, 2^7, 3^5, 3^{28} et $(-7)^{-2}=7^{-2}$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

> $\dfrac{2^3\times 3^2}{3^4\times 2^8\times 6^{-1}}=\dfrac{2^3\times 3^2}{3^4\times 2^8\times 2^{-1}\times 3^{-1}}=\dfrac{2^3\times 3^2}{3^{4-1}\times 2^{8-1}}=\dfrac{2^3\times 3^2}{3^3\times 2^7}=2^{3-7}\times 3^{2-3}=2^{-4}\times 3^{-1}$.

> On factorise le plus petit facteur, CàD 2^{21} : $2^{21}+2^{22}=2^{21}+2^{21+1}=2^{21}+2^{21}\times 2=2^{21}\times(1+2)=2^{21}\times 3$.

> On factorise 3^{21} au numérateur et 3^{21} au dénominateur : $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}}=\dfrac{3^{21}(3+1)}{3^{21}(3-1)}=\dfrac{4}{2}=2$.

> En utilisant que : lorsque n est pair, on a $(-a)^n=(-1)^n a^n=a^n$

$$\frac{\left(3^2\times(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\times 2^3\right)^{-2}}=\frac{3^{16}\times 2^{32}}{3^{-10}\times 2^{-6}}=2^{38}\times 3^{26}$$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

$$A=2^{n+3}=2^n\times 2^3=8a$$
$$B=2^{2n+1}=2^{2n}\times 2=\left(2^n\right)^2\times 2=2a^2$$
$$C=2^{-2n}=\left(2^n\right)^{-2}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}$$
$$D=(-2)^{2n+3}=(-1)^{2n+3}\times 2^{2n+3}=(-1)\times a^2.2^3=-8a^2$$
$$E=\frac{4^{n+1}}{2^{1-3n}}=\frac{\left(2^2\right)^{n+1}}{2.\,(2^n)^{-3}}=\frac{(2)^{2n+2}}{2.\,(2^n)^{-3}}=\frac{a^2\times 4}{2\times a^{-3}}=2\,a^5$$
$$F=2^{n+3}-2^{2n}=8\,a-a^2=a(8-a)$$
$$G=8^{2n}=\left(2^3\right)^{2n}=2^{3.2n}=2^{6n}=\left(2^n\right)^6=a^6$$

Solution de l'exercice 16 (Énoncé)

$$A=\frac{(a^n)^3+\left(a^2\right)^n}{1+a^n}\,\frac{a^{3n}+a^{2n}}{1+a^n}=\frac{a^{2n}\left[a^n+1\right]}{1+a^n}=a^{2n}$$

$$B=\frac{a^{n+m}.\left(a.b^n\right)^m}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^n.\left(a.b^m\right)^n}=\frac{a^{n+m}a^m b^{nm}}{a^{2n}b^{-n}a^n b^{nm}}=a^{n+m+m-2n-n}\,b^{nm+n-nm}=a^{2m-2n}\,b^n$$

$$C=\left(a^2\right)^n.\frac{\left(1+\frac{1}{b}\right)^n}{(a+ab)^n}=a^{2n}\frac{\frac{(1+b)^n}{b^n}}{a^n(1+b)^n}=a^{2n-n}\,\frac{(1+b)^n}{b^n}\,\frac{1}{(1+b)^n}=\frac{a^n}{b^n}$$

Solution de l'exercice 17 (Énoncé)

On a $16=2^4$ donc $\ln 16=\ln\left(2^4\right)=4\ln 2$.

On a $512=2^9$ donc $\ln 512=\ln\left(2^9\right)=9\ln 2$.

On a $0,125=\dfrac{1}{8}$ donc $\ln 0,125\ln\dfrac{1}{8}=-\ln 8=-\ln\left(2^3\right)=-3\ln 2$.

$\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)=-\dfrac{1}{8}\ln\left(2^2\right)+\dfrac{1}{4}\ln\left(2^3\right)=\cdots=\dfrac{1}{2}\ln 2.$

On a $72=8\times 9=2^3\times 3^2$ donc $\ln 72-2\ln 3=(3\ln 2+2\ln 3)-2\ln 3=3\ln 2.$

$\ln 36=2\ln 2+2\ln 3.$

Solution de l'exercice 18 (Énoncé)

On sait que $a^b=e^{b\ln(a)}$, ainsi $e^{3\ln 2}=2^3=8$

Autre solution $e^{3\ln 2}=e^{\ln(2^3)}=2^3=8$

$\ln(\sqrt{e})=\ln\left(e^{1/2}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right)=\dfrac{1}{3}$

$e^{-2\ln 3}=\dfrac{1}{e^{2\ln 3}}=\dfrac{1}{e^{\ln(3^2)}}=\dfrac{1}{9}$

$\ln\left(e^{-1/2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$e^{\ln 3-\ln 2}=e^{\ln(3/2)}=\dfrac{3}{2}$

Solution de l'exercice 19 (Énoncé)

$-e^{-\ln 1/2}-\dfrac{1}{e^{\ln 1/2}}=-\dfrac{1}{1/2}=-2$

On a $e^{-\ln\ln 2}=\dfrac{1}{e^{\ln(\ln 2)}}=\dfrac{1}{e^{\ln\square}}=\dfrac{1}{\ln 2}$.

$\ln\left(\dfrac{1}{e^{17}}\right)=-\ln\left(e^{17}\right)=-17$

$\ln\left(\sqrt{e^4}\right)-\ln\left(\sqrt{e^2}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(e^4\right)-\dfrac{1}{2}\ln\left(e^2\right)=\dfrac{1}{2}.4-\dfrac{1}{2}.2=1$

On a $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\exp(-\ln e^2)\right)=\dfrac{1}{2}\ln(e^{\square})=\dfrac{1}{2}(-\ln e^2))=\dfrac{1}{2}\times(-1)\times 2=-1.$

$$\exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)\exp\left(-\frac{1}{3}\times(-3)\right)=e^1=e$$

Solution de l'exercice 20 **(Énoncé)**

1. $f(2e^x-1)=f(\square)=\ln(1+\square)=\ln\left(1+[2e^x-1]\right)=\ln\left(2.e^x\right)=x+\ln 2$
2. $e^{x-\frac{1}{2}f(x)}=e^x\dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln(1+x)}}=e^x\dfrac{1}{e^{\ln(\sqrt{1+x})}}=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
3. $\dfrac{1}{2}f(x^2-2x)=\dfrac{1}{2}f(\square)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\underbrace{1+x^2+2x}_{=(x+1)^2}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left[(1+x)^2\right]=\ln(x-1)$
4. $xf'(x)-1=x\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{x-(1+x)}{1+x}=-\dfrac{1}{1+x}$
5. $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}=\exp\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\dfrac{1}{1+(x-1)}}\right)=\exp\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\dfrac{1}{x}}\right)=\exp\left(x\ln(1+x)\right)=(1+x)^x$