Les Complexes.

1 Les complexes.

1.1 Le nombre i.

Définition 1. le nombre i

Le nombre i est l'unique solution dans ....
de l'équation $X^2 = -1$.

Un autre points de vue

Après des siècles de vaines recherches, les "anciens" ont admis/accepté que

l'équation $X^2 = -1$ n'a pas de Solution/Racine dans $\mathbb{R}$

Puis des esprits ingénieux ont eu l'idée d'introduire un nombre "imaginaire", noté $\sqrt{-1}$ vérifiant $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$.

Après quelles manipulations, on s'est rendu compte que la notation $\sqrt{-1}$ pouvait aboutir à des contradictions

$$\text{Par exemple : } \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$$
$$\Longrightarrow \left(\sqrt{-1}\right)^2 = 1 \quad \text{OUPS}$$

Les contradictions viennent de la notation $\sqrt{-1}$ et de la formule $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Conclusion : On a remplacé la notation $\sqrt{-1}$ par i, CàD $\sqrt{-1} = i$ et depuis tout va bien.

Définition 2. Le nombre i, imaginaire

Il existe un nombre, noté i, tel que $i^2 = -1$

Le nombre i n'est pas un nombre réel, c'est un nombre "imaginaire"

mais il suit les mêmes règles de calculs que les autres nombres

Ainsi on a $i^2 = -1$ et aussi

$i^3 = i^{2+1} = i^2.i = -i$

$i^4 = i^{3+1} = i^3.i = (-i).i = -i^2 = 1(-1) = 1$
$i^4 = i^{2+2} = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$

...etc....$i^5 = i,\ i^6 = -1, ...$

Bonus : l'équation $X^2 = -1$ admet exactement 2 solution $X = i$ et $X = -i$.

1.2 Les nombres complexes.

Les "nombres" complexes sont les "nombres-objet" de la forme $a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Par exemples : $2+3i$, $\quad -3+5i$, $\quad {}^1/_2 - i$, $\quad 3 = 3+0\,i$, $\quad 2i\pi = i(2\pi) = 0+(2\pi)i$

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$, ainsi on a

Conclusion : $z \in \mathbb{C}$ Ssi on peut écrire $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
C'est la forme algébrique du complexe z

Polynôme et Géométrie On a : $z = a+ib = a.(1)+b.(i)$,
CàD les nombres complexes sont le mélange des nombres "remarquables" (1) et (i).

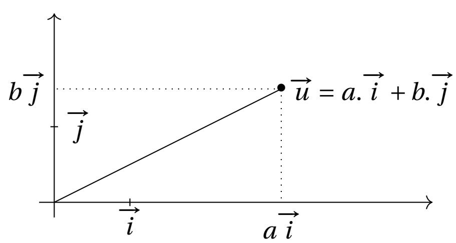
> **Polynôme**.

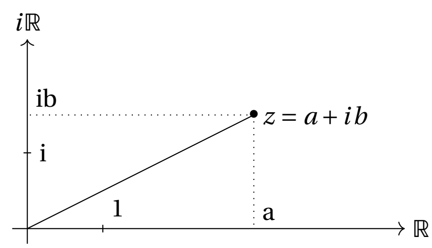
Il y a une analogie entre les complexes $z = a+ib = a.(1)+b.(i)$ et les polynômes $P = a+bX = a.(1)+b.(X)$

> **Géométrie**.

Il y a une analogie entre le complexe $z = a.(1)+b.(i)$ et le vecteur $\overrightarrow{u} = a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On dit que z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$ et on a le bô dessin





Vocabulaire.

Les nombres $a = a+0i$ sont les nombres réels "classiques".
Les nombres $ib = 0+ib$ sont les nombres imaginaires purs.
Les nombres $a+ib$ sont les nombres complexes.

Vocabulaire. Soit $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire $z = a+ib$

> Le réel a est la partie réelle du complexe z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
> Le réel b est la partie imaginaire du complexe z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Du bon sens numéro 1.

La forme algébrique est unique, CàD

$$a+ib = c+id \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \quad \text{et/ou} \quad z = z' \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

Du bon sens numéro 2.

Le complexe z est réel Ssi $z = a+ib \in \mathbb{R}$ Ssi $b = \mathrm{Im}(z) = 0$.

Le complexe z est imaginaire pur Ssi $z = a+ib \in i\mathbb{R}$ Ssi $a = \mathrm{Re}(z) = 0$

1.3 Opérations sur les complexes.

Théorème 3.
Avec les nombres complexes, on peut faire

> Addition, Soustraction, Mélange (comme avec les vecteurs), CàD $2z - 3z'$

> Produit (comme avec les polynômes), CàD $z.z'$ ou $z^2 = z.z$ ou $z^3 = z.z.z$

> On peut faire les polynômes, CàD $2z^2 - 3z + 5$ ou $2.z^2 - 3i.z + 5 + 7i$

> On peut aussi faire des quotients et même des puissances

Formulaire.

> Quand on mélange 2 complexes, c'est comme lorsqu'on mélange 2 vecteurs, donc les coef/coordonnées se mélangent
CàD $\mathrm{Re}(2z - 3z') = 2\mathrm{Re}(z) - 3\mathrm{Re}(z')$,.....

> Quand on produit deux complexes, C'est comme pour le produit de polynômes, donc ce n'est pas le produit des coef
CàD $\mathrm{Re}(z.z') \neq \mathrm{Re}(z).\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Re}(z^n) \neq \Big(\mathrm{Re}(z)\Big)^n$

On a de même pour la partie imaginaire Im

2 Conjugué, Module, Quotient.

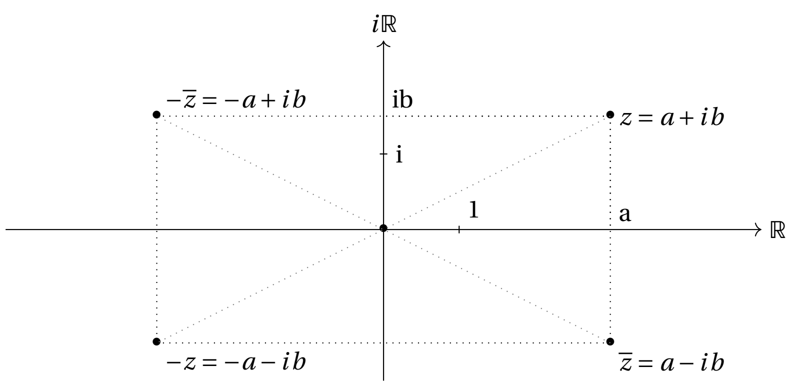
2.1 Conjugué.

Définition 4. Conjugué
Soit $z = a + ib$ un complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle conjugué de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe défini par :

$$\overline{z} = \overline{a + ib} \overset{def}{=} a - ib$$

$$\boxed{\text{Exemples : } \overline{2} = \overline{2 + i0} = 2, \quad \overline{i} = \overline{0 + 1i} = -i, \quad \overline{-2 + 3i} = -2 - 3i}$$



On a la remarquable propriétés :

$$z.\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = (a)^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

Théorème 5. Formulaire

Soit $z = a + ib$, $z' = a - ib$ des complexes

> Géométrie.

$\overline{z}$ c'est le symétrique de z par rapport à l'axe $\mathbb{R}$.

$z \in \mathbb{R} \iff z$ est un réel $\iff b = \mathrm{Im}(z) = 0 \iff \overline{z} = z$

$z \in i\mathbb{R} \iff z$ est un imaginaire pur $\iff a = \mathrm{Re}(z) = 0 \iff \overline{z} = -z$

> Facile.

Comme $z = a + ib$ et $\overline{z} = a - ib$, on a

$$a = \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad Et \quad b = \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Formulaire.

$\overline{\overline{z}} = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \overline{2z - 3z'} = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \overline{z.z'} = \ldots\ldots\ldots$ et $\quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \ldots\ldots\ldots$

Moralité : La conjugaison, c'est comme la misère

$$\overline{\frac{z - i}{i \cdot z - 1}} =$$

Démonstration : La démonstration la plus simple est la meilleure,

CàD on note que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

> $\dfrac{z + \overline{z}}{2} = \dfrac{(a + ib) + (a - ib)}{2} = a = \mathrm{Re}(z)$

> $\overline{\overline{z}} = \overline{a - ib} = \overline{a + (-b)i} = a - (-b)i = a + ib = z$

> Addition.

D'une part : $\overline{z + z'} = \overline{(a + ib) + (a' + ib')} = \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b')$

D'autre part : $\overline{z} + \overline{z'} = (a - ib) + (a' - ib') = (a + a') - i(b + b')$

Donc on a bien $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

> Produit.

D'une part : $\overline{zz'} = \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \cdots$

D'autre part : $\overline{z}.\overline{z'} = \overline{a + ib}.\overline{a' + ib'} = \cdots$

Donc on a bien $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$

> Quotient. On le fera quand on aura défini le quotient de deux complexes

2.2 Module.

Définition 6. Module d'un complexe

Soit $z = a + ib$ un complexe donné sous forme algébrique.

le module de z, noté $|z|$, est le réel

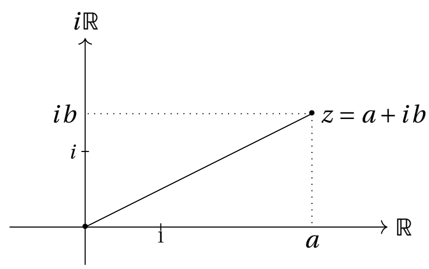
$$|z| \overset{def}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$= \text{La longueur entre } 0 \text{ et } z$$

Exemples :

$|-1| = 1$

$|i| = 1$

$|2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$



Géométrie.

$|z|$ = la distance entre z et 0.

Ainsi $|z| = |z - 0|$ est réel positif et $|z| = 0 \iff z = 0$

La distance entre le point A d'affixe z et A' d'affixe z' est égale à $|z - z'| = |z' - z|$

Théorème 7. formulaire pour le module

Soit z un complexe.

$$\boxed{\textbf{L'indispensable } |z|^2 = z.\overline{z} \text{ et } |z| = \sqrt{z.\overline{z}}}$$

> **Classique.**

- $|z.z'| = |z|.|z'|$ et Lorsque $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- Lorsque $n \in \mathbb{N}$ alors $\left|z^n\right| = |z|^n$.
- $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$

> **Distance.** La distance entre z et z' est égale à $|z - z'| = |z' - z|$

Application $|z| = |z - 0|$ = la distance entre z et 0.

Ainsi $|z|$ est réel positif et $|z| = 0 \iff z = 0$

> **L'inégalité triangulaire.**

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \quad et \quad |2z - 3z'| \leqslant 2|z| + 3|z'|$$

De plus il y a égalité, CàD $|z + z'| = |z| + |z'|$

Ssi z et z' sont sur la même demi-droite issue de 0

Ssi il existe $k \geqslant 0$ tel que $z' = kz$ si $z \neq 0$

Démonstration : Le plus simple est le mieux.

Comme $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire $z = a + ib$ ainsi

> Démonstration de $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$.

On a $-z = -a - ib$, $\overline{z} = a - ib$ et $-\overline{z} = -a + ib$, on a

$$|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

et idem pour les autres.

> Démonstration de $|z.z'| = |z|.|z'|$

On va calculer $|z.z'|^2$ avec les conjugués $|z.z'|^2 = z.z'\overline{z.z'} = z.z'.\overline{z}.\overline{z'} = z.\overline{z}.z'.\overline{z'} = |z|^2.|z'|^2$

Comme $|\square| = \sqrt{|\square|^2}$, c'est fini.

> > Démonstration de $|z^n| = |z|^n$

On fait une récurrence.

2.3 Quotient.

Définition 8.
Soit $z = a + ib$ un complexe.

$$\text{Pour calculer } \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}, \text{ il faut multiplier par le conjugué } \overline{z} = a - ib$$

Rappel : $(a+ib)(a-ib) = (a)^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$ ou bien $z\overline{z} = |z|^2$

Formulaire. Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

> **Calcul.**

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \times \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

> **Quotient et conjugué.**

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \text{ et plus généralement } \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

Moralité : La conjugaison se diffuse vraiment partout!!!!!

Application : soit a, b, c, d des réels ainsi $\overline{a} = a$,....

$$\overline{\left(\frac{az+b}{cz'+d}\right)} = \textit{La conjugaison se diffuse} = \frac{\overline{a}\,\overline{z} + \overline{b}}{\overline{c}\,\overline{z'} + \overline{d}} = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z'}+d}$$

> **Quotient et module.**

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Démonstration :

> Conjugué.

D'une part : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a+ib}\right)} = \overline{\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)} = \overline{\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}$

D'autre part : $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a-ib} = \cdots$

Donc on a bien $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

> Produit :

On a $\left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \left(\frac{z}{z'}\right).\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{z}{z'}.\frac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \frac{z.\overline{z}}{z'.\overline{z'}} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$

Comme $|\square| = \sqrt{|\square|^2}$, c'est fini.

3 Les complexes $e^{i\theta}$

3.1 Définition.

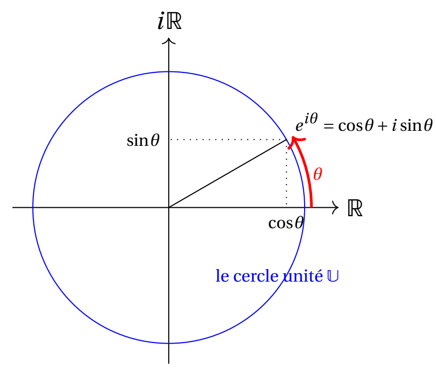
Notation : L'ensemble des complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

Ainsi on a : $z \in \mathbb{U} \iff |z| = 1$

Définition 9.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

Le complexe $\cos\theta + i\sin\theta$ est noté $e^{i\theta}$.

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} \overset{\text{def}}{=} \cos\theta + i\sin\theta$$



À connaitre

$$\boxed{1 = e^{i0}, \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

Ces formules sont "évidentes" dès que l'on pense à placer les points sur le cercle unité.

Attention l'angle est en radian, CàD avec π

Théorème 10.

Thm Moivre : Le formulaire sur les puissances s'applique aussi avec les $e^{i\alpha}$.

Propriétés "évidentes".

$$\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

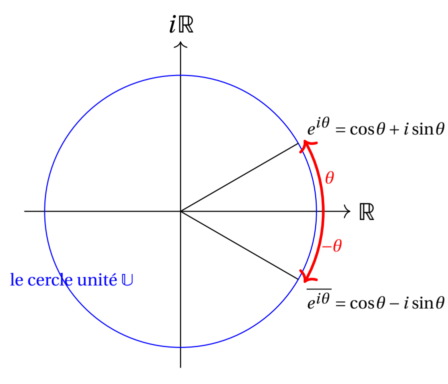
et $\quad |e^{i\theta}| = 1 \qquad$ car $\cos^2 + \sin^2 = 1$

Propriétés "puissances".

$$e^{i\alpha}.e^{i\beta} = e^{i\alpha+i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{1}{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} \text{ et } \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$e^{i2\alpha} = \left(e^{i\alpha}\right)^2 \text{ et } e^{i3\alpha} = \left(e^{i\alpha}\right)^3$$



Factorisation par l'argument moitié.

Quand on rencontre les complexes $1 + e^{i\theta}$, on doit penser à factoriser l'argument moitié

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left[e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right]$$

$$= e^{i\theta/2}\left[\underbrace{(C - iS) + (C + iS)}_{2\cos(\theta/2)}\right] = \underbrace{e^{i\theta/2}}_{\text{Ici c'est l'angle}} \quad \underbrace{2\cos(\theta/2)}_{\text{Ici c'est le module}}$$

Ce calcul s'adapte à $1 - e^{i\theta}$ et à $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$

3.2 Module-Argument.

Théorème 11. Module et argument d'un complexe

> Soit z un complexe avec $|z| = 1$

Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$ Attention : θ n'est pas unique.

Application : Quand on rencontre A un complexe avec $|A| = 1$,
Alors on peut écrire $A = e^{i\theta}$
Ainsi on remplace A par $e^{i\theta}$ et l'on poursuit les calculs.

> Soit z un complexe $z \neq 0$

Alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = r\,e^{i\theta}$
c'est la forme trigonométrique ou circulaire de z.

De plus
- le réel r est unique car $r = |z|$.
- Mais le réel θ, appelé **UN** argument de z n'est pas unique, on le note $\arg(z)$.

En revanche il existe un et un seul argument de z dans $]-\pi, \pi]$
c'est L'argument principal de z et on le note $Arg(z)$

Théorème 12. Non-unicité

> On a $0 \neq 2\pi$ et pourtant $e^{i0} = e^{i2\pi}$, CàD $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \not\Rightarrow \theta = \theta'$

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \; mod \; [2\pi]$$

> Plus généralement $z = z' \iff r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \quad \text{mod } [2\pi] \end{cases}$

Définition 13. Argument Principal d'un complexe
Soit $z \in \mathbb{C}$.

On appelle argument de z tout réel θ tel que $z = r\,e^{i\theta}$.

Lorsque $z \neq 0$, et possède θ comme argument, alors les arguments de z sont exactement les éléments de $\theta + k(2\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

CàD les arguments de z sont congrus modulo 2π .

Lorsque $z \neq 0$, il possède un unique argument dans $]-\pi, \pi]$, que l'on appelle argument principal de z, et qu'on note $Arg(z)$.

3.3 Calculer $e^z = e^{a+ib}$

Définition 14. Calculer $e^z = e^{a+ib}$
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On définit le nombre complexe $e^z = e^{a+ib}$ par la formule

$$e^z = e^{a+ib} \stackrel{def}{=} e^a.e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Ainsi $\mathrm{Re}(e^{a+ib}) = e^a \cos b$ et $\mathrm{Im}(e^{a+ib}) = e^a \sin b$

Le formulaire classique des nombres exp est encore valide avec les exponentielles complexes.

Démonstration : $e^z.e^{z'} = e^{a+ib}.e^{a'+ib'} = e^a e^{ib}.e^{a'} e^{ib'} = e^{a+a'}.e^{i(b+b')} = e^{(a+a')+i(b+b')} = e^{z+z'}$

4 Applications

4.1 Introduction à la trigonométrie

Théorème 15. Formule de Moivre-Euler
On a les formules suivantes

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$
$$e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$$

Ainsi que

$$\cos(\alpha) = \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}\right) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$
$$\sin(\alpha) = \mathrm{Im}\left(e^{i\alpha}\right) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Grâce à ces formules et formulaire sur les puissances, on fabrique plein de "formule trigo".

- $\cos(2x) = \mathrm{Re}\left(e^{i2x}\right) = \mathrm{Re}\left(\left[e^{ix}\right]^2\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\cos(x) + i\sin(x)\right]^2\right) = \mathrm{Re}\left(\text{À développer}\right)$.

  de même pour $\cos(3x)$ ou $\sin(2x) = \mathrm{Im}\left(e^{i2x}\right)$

- $\cos^2(a) = \left[\cos(a)\right]^2 = \left[\dfrac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right]^2 =$ On développe et on regroupe.

- $\cos(a)\cos(b) = \left[\dfrac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right]\left[\dfrac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right] =$ On développe et on regroupe.

4.2 Un peu de géométrie

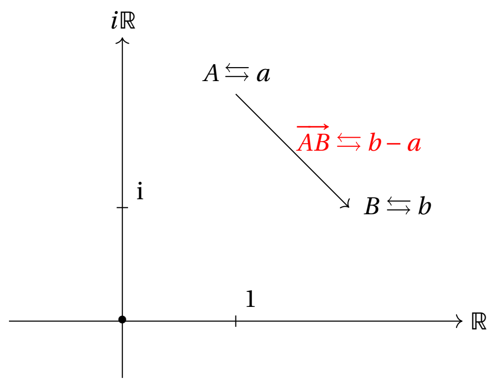
On munit le plan du repère orthonormée classique $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Définition 16. Correspondance : Point $\leftrightarrows$ Vecteur $\leftrightarrows$ Complexe

$$\begin{pmatrix} \text{Le point } M:(a,b) \\ \\ \text{de coordonnées } (a,b) \end{pmatrix} \leftrightarrows \begin{pmatrix} \text{Le vecteur } \overrightarrow{OM}=(a,b) \\ \\ \text{avec } \overrightarrow{OM}=a\vec{i}+b\vec{j} \end{pmatrix} \leftrightarrows \begin{pmatrix} \text{Le complexe } z \\ \\ \text{avec } z=a+bi \end{pmatrix}$$

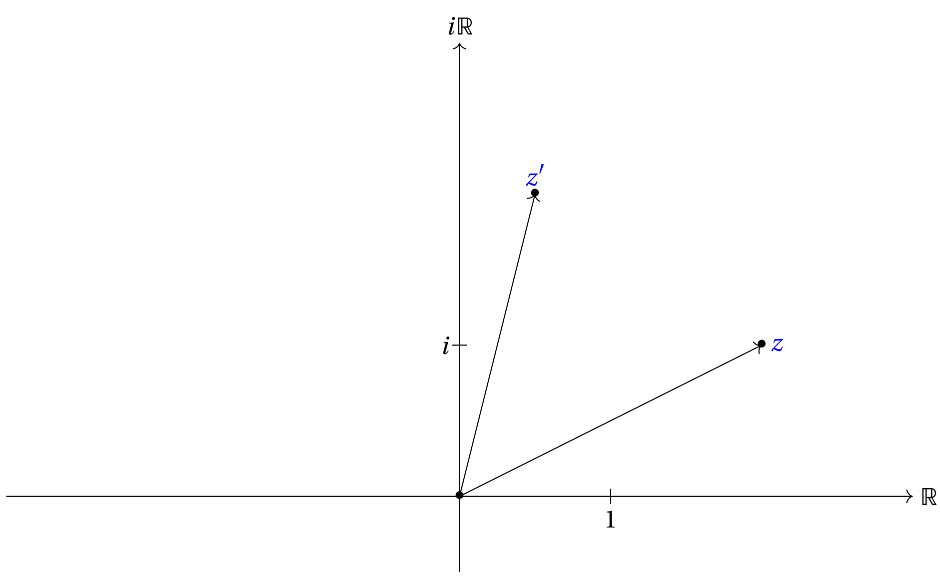
On dit que : le complexe $z=a+ib$ est l'affixe du point $M:(a,b)$
ou bien que : le complexe $z=a+ib$ est l'affixe du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{OM}=(a,b)$

Affixe d'un vecteur : Soit A, B deux points d'affixe a, b alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b-a$



Addition, Produit

Soit les complexes z et z'. Comment on construit : $z+z'$, $z-z'$ et $z.z'$?



Distance, Milieu.

Soit A, B des points d'affixes a, b Alors

$d(A, B) =$ La distance entre A et B est égale à

L'affixe du milieu du segment du $[AB]$ est

Formule d'un angle orienté.

Soit A, B, C des points d'affixes a, b, c

$$\boxed{\text{l'angle } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ est égale à } \theta \quad \text{Ssi} \quad \frac{c-a}{b-a} = \cdots = r\, e^{i\theta}}$$

Application

Les points A,B et C sont alignés Ssi θ, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, est égale à 0 ou π

Ssi $e^{i\theta} = 1$ ou -1

Ssi $r\, e^{i\theta} = \pm r \in \mathbb{R}$

Ssi le complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux Ssi θ, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, est égale à $\pm\dfrac{\pi}{2}$

Ssi $e^{i\theta} = i$ ou $-i$

Ssi $r\, e^{i\theta} = \pm i r \in i\mathbb{R}$

Ssi le complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur

Le triangle ABC est équilatéral (direct) Ssi θ, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, est égale à $\dfrac{\pi}{6}$ et $r = 1$

Ssi $\dfrac{c-a}{b-a} = r.e^{i\theta} = e^{i\pi/6}$