Calculs algébriques.

1 Quand on a des facteurs, on les garde! 1
2 Produit, Fraction 2
3 Puissances/exponentielle. 2
3.1 Puissances 2
3.2 Exponentielle et logarithme. 3
4 Factoriel et Coefficient du binôme. 4
5 Exercices 5

1 Quand on a des facteurs, on les garde!

Définition 1. Le produit se distribue toujours sur l'addition

$\forall\ a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a

$$a.\left(b+b'\right) = a.b + a.b' \text{ et } \left(a+a'\right).b = a.b + a'.b$$

Conséquence

Zéro est absorbant, CàD $\forall\ a \in \mathbb{C}$, $a.0 = 0$ et $0.a = 0$

Démonstration : On suppose que $a \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{On va montrer que } a.0 = 0}$

on va calculer $a.(a+0)$

→ D'une part $a.(a+0) = a.a + a.0$ car le produit se distribue.

→ D'autre part $a.(a+0) = a.a$ car $a + 0 = a$

Conclusion : $a.a + a.0 = a.a$

$\Longrightarrow a.0 = 0$ fini

On fait de même pour démontrer $0.a = 0$.

```
Cette démonstration n'utilise que les propriétés élémentaires de zéro et la distributivité,
 donc elle est valide dans tous les situations où il y a le mot produit,
 CàD avec des fonctions, des matrices, le produit scalaire ou le produit vectoriel.
```

Théorème 2. Chercher et garder les facteurs

Recherche des facteurs.

Même si au lycée personne ne parle des facteurs,
il faut rechercher les facteurs *et les garder.*

Kulture indispensable.

La factorisation remarquable $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

Et quand on a des facteurs, on les garde!

`Et quand on a des facteurs, on les garde !`

2 Produit, Fraction

Théorème 3. Quelques propriétés qu'il est bon de rappeler

> *Quotient de fractions*

On sait que $\dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$ et surtout

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a/b}{c/1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} \quad et \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a/1}{b/c} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{b}$$

> *Somme de fractions*

On sait que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{Haut}{Bas} = \cdots,$

Attention en pratique : La Bas n'est pas obligatoirement le plus gros possible.

3 Puissances/exponentielle.

3.1 Puissances

Définition 4. a^b le vicieux

Soit a un nombre entier/réel et b un nombre entier/réel.

> Lorsque $b = n$ est un entier positif, alors $a^n \stackrel{def}{=} \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n\ fois}$

> Lorsque b est un entier/réel, alors $a^{-b} \stackrel{def}{=} \dfrac{1}{a^b}$

> Lorsque $n = {}^1/_2$, alors $a^{1/2} \stackrel{def}{=} \sqrt{a}$

> Lorsque $b =$ bof, alors $a^b \stackrel{def}{=} e^{b\ln(a)}$

Complément autour de 0^b, de a^0 et de 0^0.

Lorsque $b \neq 0$, les définitions classiques donnent $0^b = 0$.

Lorsque $a \neq 0$, on convient que $a^0 = 1$ Remarque : Aucune des définitions classiques ne s'appliquent.

Pour calculer 0^0, on a un problème car Soit $0^0 = 0^b = 0$, Soit $0^0 = a^0 = 1$.

En algèbre, $0^0 \stackrel{def}{=} 1$ *en analyse*, 0^0 n'existe pas c'est une FI.

Théorème 5. Les 6 formules autour de a^b.

> *Kulture* $(-1)^{pair} = 1$ et $(-1)^{impair} = -1$

> *Le Formulaire : 18h, 19h, 20h, 21h, 7h, 7h45*

$$a^{b+c} = a^b\, a^c \qquad a^{b^c} \overset{def}{=} a^{(b^c)} = Rien$$

$$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c} \quad et/ou \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b} \qquad \left(a^b\right)^c = a^{bc}$$

$$(ab)^c = a^c\, b^c \qquad a^0 = 1$$

En particulier : $z^{2^n} = z^{(2^n)} \neq \left(z^2\right)^n = z^{2n}$ et $a^{(b^c)} \neq \left(a^b\right)^c$

Lorsque plusieurs formules sont utilisables pour calculer a^b, on obtient toujours le même résultat.

Remarque : Ca n'est pas "évident"
mais $2^2 = a^2 = a \times a = 4$ *est bien égale à* $2^2 = a^2 = e^{2\ln(a)} = e^{2\ln(2)}$ *!!!*

Démonstration : *Un formulaire cela se démontre*

Comme une puissance entière est une succession de produit, le formulaire se démontre simplement en détaillant les produits

> $a^2.a^3 = (a.a).(a.a.a) = a.a.a.a.a = a^5 = a^{2+3}$

> $a^2.a^{-3} = a^2.\dfrac{1}{a^3} = (a.a).\dfrac{1.}{a.a.a} = \dfrac{1}{a} = a^{-1} = a^{2-3}$

> $(a.b)^3 = (a.b).(a.b).(a.b) = (a.a.a).(b.b.b) = a^3.b^3$

> $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{a^3}{b^3}$

$$\text{Et enfin } \left(a^n\right)^m = \underbrace{a^n.a^n...a^n}_{m \text{ fois}} = a^{n+n+...+n} = a^{n.m}$$

3.2 Exponentielle et logarithme.

Théorème 6. Autour de exp / ln

Les formules de exp

Soit $a, b \in \mathbb{R}$,

$$e^{a+b} = e^a\, e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad et/ou \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^{ab} = \left(e^a\right)^b$$

$$e^0 = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x$$

Les formules de ln

Soit $a, b > 0$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad et/ou \ \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln\left(\square^\alpha\right) = \alpha \ln \square$$

$$\ln(1) = 0 \quad et \quad \ln(e) = 1$$

$$\forall x > 0, \quad \frac{d}{dx}\left[\ln(x)\right] = \frac{1}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x, \quad \forall x > 0,\ e^{\ln(x)} = x$$

4 Factoriel et Coefficient du binôme.

Définition 7. Factoriel d'un entier positif

On considère $n \in \mathbb{N}^*$

Le nombre "factoriel n", noté $n!$ est l'entier

$$n! = 1 \times 2 \times .... \times n = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$$

Convention : $0! = 1$.

Théorème. Dans $n!$, il y a plein de facteurs et on peut jouer avec

$$(n+1)! = (n+1)\, n!$$

$$n! = n\,(n-1)! = n\,(n-1)\,(n-2)!$$

Exemple. On a facilement

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 1.2 = 2, \quad 3! = 1.2.3 = 6, \quad 4! = 1.2.3.4 = 24, \quad 5! = 120$$

On a aussi

> 100! = 3628 800, 93 326 215 443 944 152 681 699 238 856 266 700 490 715 968 264 381 621 468 592 963 895 217 599 993 229 915 608 941 463 976 156 518 286 253 697 920 827 223 758 251 185 210 916 864 000 000 000 000 000 000 000 000

> 2017! = C'est un nombre de 5792 chiffres = 46912386 064................033 159 680 000

Le nombre 2017! se termine par **exactement** 502 zéros.

Définition 8. Coefficient du binôme d'ordre n, k

Soit n, k deux entiers

> Lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$, alors $\displaystyle\binom{n}{k} \overset{def}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{haut!}{bas!\;(haut-bas)!}$

En particulier comme $0! = 0$, on a $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{0}{0} = 1$

> Lorsque $k > n$ ou $k < 0$, on convient que $\displaystyle\binom{n}{k} = 0$

5 Exercices

Manipuler

Exercice 1. [Correction]

1. Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x

$$\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right), \quad \left(x^2+x+1\right)^2, \quad (2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$$

2. Factoriser les expressions polynomiales suivantes.

(a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$
(b) $25-(10x+3)^2$
(c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$
(d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$

Exercice 2. *les nombres $a,b\in\mathbb{C}$ sont choisis afin que les dénominateurs ne s'annulent pas.*

1. Simplifier, CàD écrire sous la forme $\frac{Haut}{Bas}$

$$A=\frac{1-\frac{a}{a+b}}{\frac{a+b}{a}-1} \qquad B=\frac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}} \qquad C=\frac{\frac{a}{b}-2}{\frac{b}{a}-\frac{1}{2}}$$

2. Simplifier, CàD écrire sous la forme $\frac{Haut}{Bas}$

$$A=\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1} \qquad B=\frac{1}{a}-\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^3}$$
$$C=\frac{1}{a(a+1)^2}-\frac{1}{a^2(a+1)} \qquad D=\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}$$
$$E=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2a+2} \qquad F=\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{a+1}$$

3. Simplifier : $\dfrac{e^{3x}}{e^x+e^{5x}}$ et $\dfrac{\frac{1}{x}+1}{1-\frac{1}{x^2}}$

Exercice 3. On considère a,b deux complexes et n,m dans $\mathbb{Z}$.
Simplifier les complexes suivants. Les nombres a et b sont choisis afin que les dénominateurs ne s'annulent pas

$$A=\frac{(a^n)^3+\left(a^2\right)^n}{1+a^n} \qquad B=\frac{a^{n+m}.(a.b^n)^m}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^n.(a.b^m)^n} \qquad C=\left(a^2\right)^n.\frac{\left(1+\frac{1}{b}\right)^n}{(a+ab)^n}$$

Factoriel et Binôme

Exercice 4. [Correction]

1. Calculer ou simplifier

$$\frac{7!}{5!} \qquad \frac{n!}{(n-2)!} \qquad (n+2)!-2(n+1)!+n! \qquad \frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

2. On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $k \in \{1,2,..,n\}$
   Simplifier les expressions suivante

$$A=(n+1)!-(n-2)! \qquad B=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$C=\frac{n!}{(k+1)!}-\frac{(n+1)!}{k!} \qquad D=(n-k)!-(n-k+1)!$$

Exercice 5. On considère $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n},$
2. On suppose que $k \in \{1,2,..,n\}$.
   Calculer $\binom{n}{n-k}$ en fonction de $\binom{n}{k}$
3. On suppose que $k \in \{1,2,..,n\}$.
   Calculer $\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0,1,2,..,(n-1)\}$

Simplifier $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ et à la fin mettre le résultat sous la forme $\binom{\square}{\triangle}$

Plus difficile

Exercice 7. [Correction] Pour les suites suivantes, simplifier puis donner le signe de $u_{n+1}-u_n$.

$$a_n=\frac{11^n}{n!}\qquad b_n=\binom{2n}{n}$$

Exercice 8. Pour $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$, on définit $u_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Démontrer, par récurrence, que : $\forall\, n\geqslant 2,\ u_n=\dfrac{n+1}{2n}$

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0={}^1/_2$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{2\,u_n}{1+u_n}$

Démontrer, par récurrence, que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{2^n}{1+2^n}$.

Exercice 10. On considère les suites

$$u_n=\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}\quad\text{et}\quad\Delta_n=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Montrer que : $\Delta_n=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 11. Soit la suite (F_n) définie par : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ F_n=2^{2^n}+1$

Calculer $(F_n)^2$. En déduire F_{n+1} en fonction de F_n.

Exercice 12. Pour les fonctions suivantes simplifier $h(x+1)-h(x)$

$$f(x)=x^2+x+1\qquad g(x)=x(x+1)(2x+1)\qquad H_n(x)=\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!}$$

Exercice 13. [Correction] Combien est ce qu'il y a zéro à la fin de $(1492)!$

Déterminer a le nombre de multiple de 5 entre 1 et 1492
Déterminer b le nombre de multiple de $5^2=25$ entre 1 et 1492
Déterminer c le nombre de multiple de $5^3=125$ entre 1 et 1492
Déterminer d le nombre de multiple de $5^4=625$ entre 1 et 1492
Déterminer e le nombre de multiple de $5^5=3125$ entre 1 et 1492

> Justifier que la multiplicité de 5 dans $(1492)!$ est égale à $N=a+b+c+d$
> Justifie qu'il a N zéros à la fin de $(1492)!$

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned}\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) &= X^4+X^3[\quad]+X^2[\quad]+X^1[\quad]+X^0[1]\\ &= X^4+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x^2+x+1\right)^2 &= \left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+1\right)\\ &= X^4+X^3[\quad]+X^2[\quad]+X^1[\quad]+X^0[1]\\ &= X^4+2X^3+3x^2+2x+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1) &= \left[10x^2-x-24\right]-\left[10x^2-22x+4\right]\\ &= 21\,x-28\end{aligned}$$

2.
   (a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49 = -(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2 = (6x+7)\left[-(6x-1)+6x-7\right] = -6(6x+7).$$

   (b) On a $25-(10x+3)^2 = 5^2-(10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

   (c) On a $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64 = 2(3x-4)(10x+3)$

   (d) On a $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64 = -8(x+1)(x+16)$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

$A =$ *On factorise* $(n-2)!$ $\qquad$ $B =$ *On factorise* $\dfrac{1}{n!}$

$C =$ *On factorise* $\dfrac{n!}{k!}$ $\qquad$ $D =$ *On factorise* $(n-k)!$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

> On a

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}-a_n = \frac{11^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{11^n}{n!} = \frac{11^n}{n!}\left[\frac{11}{n+1}-1\right] = \frac{11^n}{n!}\left[\frac{11-n}{n+1}\right]$$

Donc $a_{n+1}-a_n<0$ à partir du rang $N_0=11$

> On a

$$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N},\ b_{n+1}-b_n = \binom{2n+2}{n+1}-\binom{2n}{n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}-\frac{(2n)!}{n!\,n!}\\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}-1\right]\\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{2(2n+1)}{(n+1)}-1\right]\\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{4n+2-(n+1)}{(n+1)}\right]\\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\,\frac{3n+1}{(n+1)}\geqslant 0\end{aligned}$$

Donc pour tout n, $b_{n+1}-b_n\geqslant 0$.

Solution de l'exercice 13 (Énoncé)

Comme $1492 = 298\times 5+2$ donc il y $a=298$ de multiple de 5 entre 1 et 1492
Comme $1492 = 59\times 25+17$ donc il y $b=59$ de multiple de $5^2=25$ entre 1 et 1492
Comme $1492 = 11\times 125+117$ donc il y $c=11$ de multiple de $5^3=125$ entre 1 et 1492
Comme $1492 = 2\times 625+242$ donc il y $d=2$ de multiple de $5^4=625$ entre 1 et 1492
Comme $1492 = 0\times 3125+1492$ donc il y $e=0$ de multiple de $5^5=3125$ entre 1 et 1492

> Justifier que la multiplicité de 5 dans $(1492)!$ est égale à $N=a+b+c+d$

Pour compter la multiplicité de 5 dans $(1492)!$, il faut compter une fois les multiples de 5, un deuxième fois les multiples de $5^2 = 25$, une troisième fois ceux de $5^3 = 625$,.....

Or les multiples de 25 sont aussi des multiples de 5, ils sont comptés

une fois avec a

une autre avec b

Conclusion : la multiplicité de 5 dans $(1492)!$ est égale à $N = a + b + c + d = 298 + 59 + 11 + 2 = 370$

> Justifie qu'il a N zéros à la fin de $(1492)!$

Le nombre de zéro à la fin de $(1492)!$, c'est la multiplicité de 10 dans $(1492)!$

Or $10 = 2 \times 5$. La multiplicité de 5, c'est 370, celle de 2 c'est bien plus (on peut la calculer avec la même méthode)

Conclusion : la multiplicité de 10 dans $(1492)!$ est égale à 370