Exercices sure les complexes

1 Forme Algébrique

1.1 QCM

Exercice 1. Applications

1. À quoi est égal i^7

   ☐ 1 ☐ i ☐ $-i$ ☐ -1

2. À quoi est égal $(1-2i)(-1+3i)$

   ☐ $5+5i$ ☐ $-7+5i$ ☐ $-5-5i$ ☐ $-7-5i$

3. À quoi est égal $(1+i)^3$

   ☐ $2+2i$ ☐ $-2+2i$ ☐ $2-2i$ ☐ $-2-2i$

4. À quoi est égal $2(-i+1)(-2i)(-i-1)(i-1)$

   ☐ $16i$ ☐ $-16i$ ☐ 16 ☐ -16

5. À quoi est égal $Z=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

   ☐ $2\sqrt{2}$ ☐ $2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}$ ☐ $2+\sqrt{2}+i(2-\sqrt{2})$ ☐ $2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$

6. Quel est le(s) nombre(s) qui élevé au carré, vaut i ?

   ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$ ☐ $-\frac{i}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$

7. À quoi est égal $\overline{i(z-1)}$

   ☐ $i.\overline{z}-i$ ☐ $i.\overline{z}+i$ ☐ $-i.\overline{z}+i$ ☐ $-i.\overline{z}-i$

8. Quel est le module de $\frac{1}{-3+4i}$

   ☐ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ☐ $\frac{1}{5}$ ☐ $\frac{1}{25}$

9. On suppose que $|z|=1$. À quoi est égale $\frac{1}{z}$

   ☐ $\frac{1}{\overline{z}}$ ☐ $-z$ ☐ $-\overline{z}$ ☐ $\overline{z}$

10. Identifier la figure définie par $|z+i|\leqslant 2$.

    ☐ le disque de centre $A(i)$ et de rayon 2 ☐ le disque de centre $A(-i)$ et de rayon 2
    ☐ le disque de centre $A(i)$ et de rayon $\sqrt{2}$ ☐ le disque de centre $A(-i)$ et de rayon $\sqrt{2}$

1.2 Le nombre complexe j

On considère le nombre complexe $j \overset{def}{=} \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1. Formulaire
   (a) Déterminer sa partie réelle, imaginaire, son conjugué, son module.
   Calculer j^2, j^3, j^4, ……
   Placer ces nombres complexes dans le plan complexe.
   (b) Vérifier que j est une racine du polynôme X^2+X+1. Trouver l'autre racine.

2. En utilisant le formulaire ci-dessus, répondre aux questions suivantes
   (a) Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a+bj$, où a et b sont des nombres réels :
   $$z_1 = (1+j)^7, \quad z_2 = (2-j)(3+2j), \quad z_3 = \frac{j^9}{1+j} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{1}{1-j}$$
   (b) Calculer $\left(x-y\right)\left(x-jy\right)\left(x-j^2y\right)$

1.3 Forme Algébrique

Exercice 2. Exercice que l'on va faire en classe.

1. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$z_1 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2$

$z_2 = \dfrac{1-4i}{1+5i}$

$z_3 = \dfrac{1+i}{1-i}$

$z_4 = \dfrac{1-2i}{1+5i} + \dfrac{1+2i}{1-5i}$

$z_5 = (2+i)^3$

$z_6 = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{5}}$

$z_7 = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$

$z_8 = (a+ib)^3 + (a-ib)^3$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

2. On considère $z_1 = \dfrac{4-i}{3+2i}$ et $z_2 = \dfrac{4+i}{3-2i}$

   Vérifier que $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ et $z_1 - z_2 \in i\mathbb{R}$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer, en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$, les quantités suivantes :

$$\mathrm{Re}(iz), \quad \mathrm{Im}(iz), \quad \mathrm{Re}\left(z^2\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(z^2\right)$$

4. Soit z un complexe non nul. Calculer $\left|\dfrac{z}{|z|}\right|$. Interpréter.

5. Soit $u, v \in \mathbb{C}$. *On veut vérifier que* $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right)$.
   (a) En utilisant $u = a + ib$ et $v = a' + ib'$, montrer que : $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right)$
   (b) En utilisant $|\square|^2 = \square\overline{\square}$, montrer que : $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right)$

6. Soit $z = a + ib$ un complexe non-nul

   Calculer la partie imaginaire de $z + \dfrac{1}{z}$.

   En déduire que : $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow (z \in \mathbb{U}$ ou $z \in \mathbb{R})$

Exercice 3. Du calcul

1. Calculer $(1-i)^3$, $(-2+3i)^4$, $(2+i)^5$
2. Calculer $|-2|$, $|3i|$, $|-1+i|$, $\left|\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|$, $\left|(1+i)^3\right|$
3. Mettre les complexes sous forme algébrique $\dfrac{1}{2+3i}$, $\dfrac{2-i}{1+2i}$

Exercice 4. [Correction] *On veut calculer* $|1+iz|^2 + |z+i|^2$.

1. Soit $z = a + ib$. Calculer $|1+iz|^2 + |z+i|^2$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. En utilisant $|\square|^2 = \square\overline{\square}$, calculer $|1+iz|^2 + |z+i|^2$

Exercice 5. [Correction] Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\left|\dfrac{2}{1+it} - 1\right|$
2. Géométriquement où se trouve le point M d'affixe $\dfrac{2}{1+it}$

Exercice 6. [Correction] Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc = 1$ et et $cz + d \neq 0$

$$\text{Vérifier que : } \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{y}{|cz+d|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Exercice 7. [Correction] Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$ et $|a| = 1$. Montrer que : $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$

Exercice 8. [Correction] Soit u un complexe avec $u \neq 1$. Soit z un complexe avec $z \notin \mathbb{R}$.

$$\text{On veut montrer : } \frac{z - u\overline{z}}{1-u} = A \in \mathbb{R} \iff |u| = 1$$

$\Longleftarrow$ Calculer $\overline{A} - A$. Conclure.

$\Longrightarrow$ On suppose que $A \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{On doit montrer } |u| = 1, \text{ CàD } u\overline{u} = ... = 1.}$$

Étape 1 : On isole u. Étape 2 : On calcule $u\overline{u}$.

1.4 Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

Exercice 9. [Correction] On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C} - \{2i\}$ par

$$f : z \longmapsto f(z) = \frac{z+1}{z-2i}$$

1. On suppose que $z = x + iy$, calculer $\operatorname{Re}\big(f(z)\big)$. Déterminer les complexes $z \neq 2i$ tel que $\operatorname{Re}\big(f(z)\big) = 0$
2. On suppose que $z = x + iy$, calculer $\big|f(z)\big|^2$. Déterminer les complexes $z \neq 2i$ tel que $\big|f(z)\big|^2 = 1$

Exercice 10. [Correction] Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

On considère la fonction f qui, à z associe le complexe $z' = f(z) = \dfrac{z^2 - 2i}{z\overline{z} + 1}$

1. Justifier que le nombre $f(z)$ est bien définie, CàD on ne divise jamais par 0.
2. Montrer que $z' = f(z) \in \mathbb{R} \iff z^2 - \overline{z}^2 = 4i$ Rappel $z' \in \mathbb{R} \iff \overline{z'} = z'$.
3. En déduire que : $z' = f(z) \in \mathbb{R}$ Ssi on peut écrire $z = x + i\dfrac{1}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}$
4. Montrer (en suivant la même démarche) que : $z' = f(z) \in i\mathbb{R}$ Ssi on peut écrire $z = x + ix$ ou $z = x - ix$.

2 Forme polaire, circulaire

2.1 QCM

Exercice 11.

1. À quoi est égale $e^{i\frac{7\pi}{2}}$

   ☐ 1 ☐ -1 ☐ $-i$ ☐ $-i$

2. À quoi est égale $-e^{i\frac{\pi}{6}}$

   ☐ $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ☐ $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ☐ $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ☐ $e^{-i\frac{7\pi}{6}}$

3. Placer les complexes suivants sur le cercle trigo.

$$e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ,e^{-i\pi} \quad ,e^{-i\frac{\pi}{8}}, \quad e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{12}}, \quad e^{i\frac{7\pi}{8}}, \quad e^{i\frac{17\pi}{3}}, \quad e^{i\frac{56\pi}{8}}$$

4. À quoi est égale $e^{-i\frac{5\pi}{4}}$

   ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

5. À quoi est égale $e^{i\frac{\pi}{6}}$

   ☐ $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i$ ☐ $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

Exercice 12.

1. À quoi est égale $\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

   ☐ $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\frac{1\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ☐ $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

2. À quoi est égale $e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{4}}$

   ☐ $e^{i\frac{\pi}{12}}$ ☐ $e^{i\frac{-\pi}{12}}$ ☐ $-e^{i\frac{\pi}{12}}$

3. À quoi est égale $\frac{1}{e^{i\theta}}$

   ☐ $e^{i\frac{1}{\theta}}$ ☐ $e^{-i\frac{1}{\theta}}$ ☐ $e^{-i\theta}$ ☐ $-e^{i\theta}$

4. À quoi est égale $i\,e^{i\theta}$

   ☐ $e^{i\frac{\theta}{2}}$ ☐ $e^{i\theta+\frac{\pi}{2}}$ ☐ $e^{i\theta+i\frac{\pi}{2}}$ ☐ $e^{i\theta-i\frac{\pi}{2}}$

2.2 Sous la forme $r\,e^{i\theta}$

Exercice 13. [Correction]

1. Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants : $12, \quad -4, \quad -2i\sqrt{3}, \quad 1+i, \quad \frac{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$
2. En utilisant la forme trigo, calculer $\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}, \quad \frac{1}{1+i\tan x}, \quad \left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7, \quad \left(\frac{-1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^n$

Exercice 14. [Correction] *Factoriser l'argument moitié*

1. Soit $e^{i\theta}$ un complexe $\neq 1$. Calculer $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right)$
2. Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire de $\frac{1-e^{in\theta}}{1+e^{i\theta}}$

Exercice 15. [Correction] Montrer $\forall\left(z,z'\right)\in\mathbb{C}^2$,

$$\left.\begin{array}{c}|z|=\left|z'\right|=1\\ z.z'\neq -1\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{z+z'}{1+z.z'}\in\mathbb{R}.$$

Rappel : $|z|=1$, alors on peut écrire $z=e^{i\theta}$

Exercice 16. [Correction] Soient a et b, deux complexes de module 1 tels que les dénominateurs ne s'annulent pas.

Démontrer que $\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ et $\dfrac{a+b}{1+ab}$ appartiennent à $\mathbb{R}$.

Rappel : a est un complexe de module 1 , alors on peut écrire $a=e^{i\alpha}$

3 Un peu de trigo

Exercice 17.

1. Finir les calculs proposer dans le théorème et vérifier que :
$$\begin{aligned}\cos(2x)&=\cos^2(x)-\sin^2(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(2x)=2\cos(x)\sin(x)\\ &=2\cos^2(x)-1\end{aligned}$$
2. Montrer que
$$\begin{aligned}\cos(3x)&=\cos^3(x)-3\sin^2(x)\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(2x)=\sin(x)\left(4\cos^2(x)-1\right)\\ &=4\cos^3(x)-3\cos(x)\end{aligned}$$

Exercice 18.

1. Finir les calculs proposer dans le théorème et vérifier que :
$$\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$$
Application : En déduire une primitive de $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$
2. Montrer que
$$\cos(x)\cos(y)=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$
$$\cos(x)\sin(y)=\frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2}$$
3. Finir le calcul
$$\cos^3(x)=\left[\cos(x)\right]^3=\left[\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right]^3= \text{On développe avec le binôme, on simplifie les puissance puis on regroupe.}$$
Application : En déduire une primitive de $\cos^3(x)$.

4 Un peu de géométrie

Exercice 19. Soit A un point d'affixe z. Reconnaitre les figures définie par

$$|2z-3|=5,\quad |2z-3|\geqslant 5 \text{ et par } \max\left(|z-1|,|z+1|\right)\leqslant 2$$

Exercice 20. Théorème de Von Aubel.

On considère un quadrilatère $ABCD$ de sens direct et on note a,b,c,d les affixes des points A,B,C,D.
On construit 4 carrés C_1, C_2, C_3 et C_4 de centres respectifs P, Q, R et S qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ du quadrilatère $ABCD$.

1. Faire une figure avec le quadrilatère $ABCD$, le carré C_1 et son centre P
   Calculer les affixes des différents points en fonction des complexes a et b. En particulier déterminer l'affixe de P
2. Démontrer que les diagonales de $PQRS$ sont perpendiculaires et de mêmes longueurs
   Conclusion le quadrilatère $PQRS$ est un carré (c'est le thm de Von Aubel).

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On a $$\begin{aligned} |u+v|^2+|u-v|^2 &= \left|(a+ib)+(a'+ib')\right|^2+\left|(a+ib)+(a'+ib')\right|^2 \\ &= \left|(a+a')+i(b+b')\right|^2+\left|(a-a')+i(b-b')\right|^2 \\ &= \left[(a+a')^2+(b+b')^2\right]+\left[(a-a')^2+(b-b')^2\right] \\ &= \left[a^2+a'^2+2a.a'+b^2+b'^2+2b.b'\right]+\left[a^2+a'^2-2a.a'+b^2+b'^2-2b.b'\right] \\ &= 2\left(a^2+b^2\right)+2\left(a'^2+b'^2\right) \\ &= 2\left(|u|^2+|v|^2\right) \end{aligned}$$
2. On a $$\begin{aligned} |u+v|^2+|u-v|^2 &= (u+v)\overline{(u+v)}+(u-v)\overline{(u-v)} \\ &= (u+v)\left(\overline{u}+\overline{v}\right)+(u-v)\left(\overline{u}-\overline{v}\right) \\ &= [\cdot]+[\cdot] \\ &= 2\left(|u|^2+|v|^2\right) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) 1. Soit $z=a+ib$.

On a $>|1+iz|^2=|1+i(a+ib)|^2=|(1-b)+ia|^2=(1-b)^2+a^2=a^2+b^2-2b+1$

$>|z+i|^2=|(a+ib)+i|^2=|a+i(b+1)|^2=a^2+(b+1)^2=a^2+b^2+2b+1$

Conclusion : $|1+iz|^2+|z+i|^2=\left[a^2+b^2-2b+1\right]+\left[a^2+b^2+2b+1\right]=2a^2+2b^2+1=2|z|^2+2$

2. On a

$$\begin{aligned} |1+iz|^2+|z+i|^2 &= (1+iz)\overline{1+iz}+(z+i)\overline{z+i} \\ &= (1+iz)(1-i\overline{z})+(z+i)(\overline{z}-i) \\ &= \left[1-i\overline{z}+iz+z\overline{z}\right]+\left[z\overline{z}-iz+i\overline{z}+1\right] \\ &= 2\,z\overline{z}+2 \\ &= 2|z|^2+2 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

> Le plus rapide

$$\left|\frac{2}{1+it}-1\right|=\left|\frac{1-it}{1+it}\right| \underset{=}{\text{Formulaire}} \frac{|1-it|}{|1+it|} \underset{=}{\text{def module}} \frac{\sqrt{(1)^2+(-t)^2}}{\sqrt{(1)^2+(t)^2}}=1$$

> Avec les conjugués

$$\begin{aligned} \left|\frac{2}{1+it}-1\right|=\sqrt{\square\overline{\square}} &= \sqrt{\left(\frac{2}{1+it}-1\right)\overline{\left(\frac{2}{1+it}-1\right)}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{1+it}-1\right)\left(\frac{2}{1-it}-1\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2-(1+it)}{1+it}\right)\left(\frac{2-(1-it)}{1-it}\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1-it}{1+it}\right)\left(\frac{1+it}{1-it}\right)} \\ &= \sqrt{1}=1 \end{aligned}$$

$>$ Comme en terminal c'est plus long et plus difficile

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2}{1+it}-1\right| &\overset{\text{Forme a+ib}}{=} \left|\frac{2}{(1+it)}\frac{(1-it)}{(1-it)}-1\right| \\
&= \left|\frac{2(1-it)}{1^2+t^2}-1\right| \\
&= \left|\frac{1-t^2}{1+t^2}-i\frac{2t}{1+t^2}\right| \\
&\overset{\text{def module}}{=} \sqrt{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{t^4+2t^2+1}} = \sqrt{1} = 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\left|\frac{2}{1+it}-1\right|$ = Distance entre $\frac{2}{1+it}$ et 1 est égale à 1.

Ainsi $\frac{2}{1+it}$ est sur le cercle de centre $\Omega = (1,0)$ et de Rayon 1.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On a que

$$\begin{aligned}
\frac{az+b}{cz+d} &= \frac{(az+b)\overline{(cz+d)}}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{(ax+b+iay)(cx+d-icy)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{Moche+i[acxy+ady-acxy-bcy]}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{Moche+i[(ad-bc)y]}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{Moche+i[y]}{|cz+d|^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{Moche+i[y]}{|cz+d|^2}\right) = \frac{y}{|cz+d|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

Comme $|a|=1$, Donc on sait que $\overline{a}.a=|a|^2=1$

On va utiliser $|\square|=\sqrt{\square\overline{\square}}$

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|=\sqrt{\square\overline{\square}}=\sqrt{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)\overline{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)}}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)\left(\frac{\overline{a}-\overline{b}}{1-a\overline{b}}\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{\textit{On développe le haut}}{\textit{On développe le Bas}}}$$
$$\textit{On utilise que } a\overline{a}=|a|^2=1^2=1$$
$$=\sqrt{1}=1$$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

$\Longleftarrow$ On suppose que $|u|=1$

On sait que $A\in\mathbb{R}\iff\overline{A}=A\iff\overline{A}-A=0.$

$$\boxed{\text{On doit montrer } \overline{A}-A=0.}$$

On a

$$\overline{A}-A=\overline{\left(\frac{z-u\overline{z}}{1-u}\right)}-\frac{z-u\overline{z}}{1-u}=\frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}}-\frac{z-u\overline{z}}{1-u}$$
$$=\frac{(\bar{z}-\bar{u}z)(1-u)-(z-u\bar{z})(1-\bar{u})}{(1-\bar{u})(1-u)}$$
$$=\frac{[\bar{z}-\bar{z}u-\bar{u}z+\bar{u}uz]-[z-z\bar{u}-u\bar{z}+u\bar{u}\bar{z}]}{(1-\bar{u})(1-u)}$$
$$\textit{De plus } u\bar{u}=|u|^2=1,\ \textit{Donc Haut}=\mathscr{O}$$
$$=\frac{\mathscr{O}}{(1-\bar{u})(1-u)}=\mathscr{O}\qquad Yes!$$

$\Longrightarrow$ On suppose que $A\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{On va montrer } |u|=\sqrt{u\bar{u}}=1}$$

On a $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}=A\Longrightarrow u=\dfrac{A-\bar{z}}{A-z}$

$$\text{Ainsi on a : } |u|=\sqrt{u\bar{u}}=\sqrt{\frac{A-\bar{z}}{A-z}.\overline{\left(\frac{A-\bar{z}}{A-z}\right)}}=\sqrt{\frac{A-\bar{z}}{A-z}.\frac{\overline{A}-z}{\overline{A}-\bar{z}}}=\sqrt{\frac{A-\bar{z}}{A-z}.\frac{A-z}{A-\bar{z}}}=\sqrt{1}=1$$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

1. On suppose que $z = x + iy$, calculer $\text{Re}\Big(f(z)\Big)$.

Le texte indique qu'il faudra remplacer z par $x + iy$, mais avant on fait BasBar ! ! !

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{z+1}{z-2i} &= \frac{z+1}{z-2i}\,\frac{\overline{z-2i}}{\overline{z-2i}} \\ &= \frac{(z+1)(\bar{z}+2i)}{|z-2i|^2} \\ &= \frac{z.\bar{z}+2iz+\bar{z}+2i}{|z-2i|^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2)+2i(x+iy)+(x-iy)+2i}{|z-2i|^2} \\ &\quad \textit{On remplace } z \textit{ par } x+iy \\ &= \left(\frac{x^2+y^2-2y+x}{|z-2i|^2}\right)+i\left(\frac{2x-y+2}{|z-2i|^2}\right) \end{aligned}$$

Déterminer les complexes $z \neq 2i$ tel que $\text{Re}\Big(f(z)\Big) = 0$

On a $\text{Re}\Big(f(z)\Big) = 0 \iff \dfrac{x^2+y^2-2y+x}{|z-2i|^2} = 0 \iff x^2+y^2-2y+x = 0$

Complément : les points de coordonnées (x, y) avec $x^2+y^2-2y+x = 0$ forment un cercle mais ce n'est plus au programme.

2. On suppose que $z = x + iy$, calculer $\Big|f(z)\Big|^2$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \Big|f(z)\Big|^2 = \left|\frac{z+1}{z-2i}\right|^2 &= \left(\frac{z+1}{z-2i}\right)\left(\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}+2i}\right) \\ &= \frac{z.\bar{z}+z+\bar{z}+1}{z.\bar{z}+2iz-2i\bar{z}+4} \\ &\quad \textit{On remplace } z \textit{ par } x+iy \\ &= \frac{(x^2+y^2)+2x+1}{(x^2+y^2)-4y+4} \end{aligned}$$

Déterminer les complexes $z \neq 2i$ tel que $\Big|f(z)\Big|^2 = 1$

$$\begin{aligned} \text{On a } \Big|f(z)\Big|^2 = 1 &\iff \frac{(x^2+y^2)+2x+1}{(x^2+y^2)-4y+4} = 1 \\ &\iff (x^2+y^2)+2x+1 = (x^2+y^2)-4y+4 \\ &\iff 2x+4y-3 = 0 \end{aligned}$$

Les points de coordonnées (x, y) avec $2x+4y-3 = 0$ forment une droite

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. On a $f(z)=\dfrac{z^2+2i}{z\overline{z}+1}=\dfrac{Haut}{Bas}$
   Comme $Bas=z\overline{z}+1=(x+iy)(x-iy)+1=x^2+y^2+1$ et $x,y\in\mathbb{R}$, ainsi Bas est toujours $\neq 0$.
   Donc on ne divise jamais par 0.
2. On a

$$\begin{aligned} z'=f(z)=\frac{z^2-2i}{z\overline{z}+1}\in\mathbb{R} &\iff \overline{z'}=z' \\ &\iff \overline{\left(\frac{z^2-2i}{z\overline{z}+1}\right)}=\frac{z^2-2i}{z\overline{z}+1} \\ &\iff \frac{\overline{z}^2+2i}{z\overline{z}+1}=\frac{z^2-2i}{z\overline{z}+1} \\ &\iff \overline{z}^2+2i=z^2-2i \\ &\iff z^2-\overline{z}^2=4i \end{aligned}$$

3. On écrit $z=x+iy$ et on poursuit le calcul.

$$\begin{aligned} z'=f(z)=\frac{z^2-2i}{z\overline{z}+1}\in\mathbb{R} &\iff z^2-\overline{z}^2=4i \\ &\iff (x+iy)^2-(x-iy)^2=4i \\ &\iff [x^2-y^2+i2xy]-[x^2-y^2-i2xy]=4i \\ &\iff i4xy=4i \\ &\iff y=\frac{1}{x}\quad \text{avec } x\neq 0 \\ &\iff z=x+iy=x+i\frac{1}{x} \end{aligned}$$

   Conclusion : On a bien $z'=f(z)\in\mathbb{R}$ Ssi on peut écrire $z=x+i\dfrac{1}{x}$ avec $x\in\mathbb{R}^*$

4. Montrer (en suivant la même démarche) que : $z'=f(z)\in i\mathbb{R}$ Ssi on peut écrire $z=x+ix$ ou $z=x-ix$.

Solution de l'exercice 13 (Énoncé)

1. Facile ! ! !

   Il faut bien comprendre comment on place le point M d'affixe $e^{i\theta}$ en regardant l'angle entre la demi droite $\mathbb{R}^+$ et la demi droite $[OM)$.

2. Il faut faire des dessins ! ! ! !

   > Avec le dessin, on a facilement

$$12=12e^{i0},\quad -4=4e^{i\pi}\quad ,-2i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

   > $A=1+i=re^{i\theta}$?

   On commence par $r=|A|=|1+i|=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$

   Ainsi $\dfrac{1+i}{|1+i|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est complexe de module 1,

   On fait un dessin et on le place sur le cercle $\mathbb{U}$ et on lit l'angle $\theta={}^{\pi}/_{4}$

   On trouve $\dfrac{1+i}{|1+i|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{4}}$

   Conclusion : $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

   > $A=\dfrac{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=re^{i\theta}$?

   On commence par $r=|A|=\left|\dfrac{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right|=\cdots=\sqrt{2}$

   Ainsi $\dfrac{A}{|A|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}$ est complexe de module 1,

   On fait un dessin et on le place sur le cercle $\mathbb{U}$ et on lit l'angle $\theta=-{}^{2\pi}/_{3}$

   On trouve $\dfrac{A}{|A|}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$$\text{Conclusion : } \frac{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = r\,e^{i\theta} = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

3. On utilise $\rho e^{i\square}$ et le formulaire sur les puissances

$$\frac{\sqrt{3}-i}{i-1} = \frac{r\,e^{i\theta}}{r'\,e^{i\theta'}} = \frac{2\ e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,e^{i(-\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4})}$$

$$\frac{1}{1+i\tan x} = \frac{1}{1+i\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{\cos(x)}{\cos(x)+i\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{e^{i(\frac{\pi}{2}-x)}}$$

$$\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7 = \left(r\,e^{i\theta}\right)^7 = r^7\,e^{i7\theta}$$

$$\left(\frac{-1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{1492} = \left(\frac{r\,e^{i\theta}}{r'\,e^{i\theta'}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}\ e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2\ e^{-i\frac{\pi}{6}}}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6})}\right)^n$$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

$$\begin{aligned}
\text{On a : } \frac{1}{1-e^{i\theta}} &= \textit{Argument moitié}\\
&= \frac{1}{e^{i\theta/2}\,[-2i\sin(\theta/2)]}\\
&= \frac{ie^{-i\theta/2}}{2\sin(\theta/2)}\\
&= \frac{i[\cos(\theta/2)-i\sin(\theta/2)]}{2\sin(\theta/2)}\\
&= \frac{\sin(\theta/2)+i\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)}\\
&= \frac{1}{2}+i\frac{\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)}\\
\text{Conclusion : } \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1-e^{in\theta}}{1+e^{i\theta}} &= \text{argument moitié}\\
&= \frac{e^{in\theta/2}[........]}{e^{i\theta/2}[........]}\\
&= e^{i(n-1)\theta/2}\frac{-2i\sin(n\theta/2)}{2cos(\theta/2)}\\
&= i\frac{-\sin(n\theta/2)}{cos(\theta/2)}\,[\cos(\square)+i\sin(\square)]\\
&= \underbrace{\frac{\sin(n\theta/2)}{cos(\theta/2)}\sin(\square)}_{\textit{Partie réelle}} - i\frac{\sin(n\theta/2)}{cos(\theta/2)}\cos(\square)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé) On suppose $|z| = 1$ et $|z'| = 1$

$$\boxed{\text{On va montrer que : } \frac{z+z'}{1+z.z'} \in \mathbb{R}.}$$

Comme $|z| = 1$ et $|z'| = 1$, on peut écrire $z = e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\theta'}$

$$\begin{aligned}
\textit{Ainsi on a } \frac{z+z'}{1+z.z'} &= \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i\theta}.e^{i\theta'}} \\
&\quad \textit{Argument moitié} \\
&= \underbrace{\frac{e^{i\theta/2}\,e^{i\theta'/2}}{e^{i(\theta+\theta')/2}}}_{=1}\left(\frac{\textit{moche}}{\textit{Pas bô}}\right) \\
&= 1\frac{\cos\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta+\theta'}{2}\right)} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 16 (Énoncé)

Correction 1 : On va utiliser $e^{i\Box}$ et l'argument moitié.

Comme $|a| = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^{i\theta}$.

De même comme $|b| = 1$ alors il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $b = e^{i\theta'}$.

$$\text{Ainsi on a } \frac{a+b}{1+ab} = \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i\theta}\,e^{i\theta'}}$$

Argument moitié

$$= \frac{e^{i\theta/2}\,e^{i\theta'/2}[.......]}{e^{i(\theta+\theta')/2}[.......]} = ... = \frac{\cos(\dfrac{\theta-\theta'}{2})}{\cos(\dfrac{\theta+\theta'}{2})}$$

Correction 2 : On va utiliser $e^{i\Box}$ et le couple Complexe-Conjugué.

On sait que : $A \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(A) = 0 \iff \dfrac{A-\overline{A}}{2i} = 0 \iff \overline{A} = A$

De plus comme $|a| = 1$ et $|b| = 1$ alors il existe $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^{i\theta}$ et $b = e^{i\theta'}$.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi on a } \overline{A} = \overline{\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)} &= \frac{\overline{a}+\overline{b}}{1+\overline{a}\overline{b}} \\
&= \frac{\overline{e^{i\theta}}+\overline{e^{i\theta'}}}{1+\overline{e^{i\theta}}\,\overline{e^{i\theta'}}} \\
&= \frac{e^{-i\theta}+e^{-i\theta'}}{1+e^{-i\theta}\,e^{-i\theta'}} \\
&\quad \text{On elève les puissances } <0 \\
&\quad \text{On simplifie les fractions} \\
&= \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i\theta}\,e^{i\theta'}} = A
\end{aligned}$$