TD 1 manipulation des objets.

Mercredi 10 Septembre 2024.

Manipulation

Exercice 1. Exprimer en fonction de $a = 2^n$

$$A = 2^{n+3} \qquad B = 2^{2n+1} \qquad C = 2^{-2n} \qquad D = (-2)^{2n+3}$$

$$E = \frac{4^{n+1}}{2^{1-3n}} \qquad F = 2^{n+3} - 2^{2n} \qquad G = 8^{2n}$$

Exercice 2. [Correction] Simplifier

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \qquad \frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} \qquad \frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} \qquad \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$$

Exercice 3. [Correction] Montrer que les fonction suivantes sont impaires, CàD que $\forall\, x \in \mathscr{D},\ f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2021+x}{2021-x}\right) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Exercice 4. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = {}^1/_2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n}{1+u_n}$

Démontrer, par récurrence, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$.

Pair-Impair

Exercice 5. [Correction] On sait que : $1 + 2 + 3 + \cdots + \square = \dfrac{\square(\square+1)}{2}$

On considère $P_n = 2 + 4 + \cdots + (2n)$ et $I_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1)$

Calculer P_n puis $P_n + I_n$ et enfin I_n.

Exercice 6. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

$P_n =$ Le produit des entiers pairs de 2 à $2n = 2.4.6....(2n-2)(2n)$

ET

$I_n =$ Le produit des entiers impairs de 1 à $(2n+1) = 1.3.5....(2n+1)$

Calculer (à l'aide, entre autre, de factoriel) P_n puis $P_n \times I_n$ et enfin I_n.

Manipulation plus difficile

Exercice 7. [Correction] On considère la suite (a_n) définie par

$$a_0 = 2 \quad et \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{(a_n)^2}{2a_n - 1}$$

Démontrer, par récurrence, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{2^{2^n}}{2^{2^n} - 1}$

Exercice 8. On considère la suite $u_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$

Simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ puis vérifier que : $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 9. Pour les fonctions suivantes simplifier $h(x+1) - h(x)$

$$f_n(x) = \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!} \qquad g_n(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

Exercice 10. [Correction] Soit la suite (F_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n = 2^{2^n} + 1$

Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n = F_0.F_1 \cdots F_{n-1} + 2$.

Exercice 11. [Correction] Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1^2} + + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

Exercice 12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \geqslant \frac{3n}{2n+1}$$

Correction.

Solution de l'exercice 2 **(Énoncé)**

> $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = (2n)(2n+1)$

> $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}} = \dfrac{n!}{2^{2n}}\left[\dfrac{n+1}{2^2} - 1\right] = \dfrac{n!}{2^{2n}}\left[\dfrac{n-3}{2^2}\right]$

> $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{2n\times(n+1)!} + \dfrac{1}{2\times(n+2)!} = \dfrac{1}{n!}\left[1 + \dfrac{1}{2n(n+1)} + \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}\right] = \dfrac{1}{n!}\left[\dfrac{2n(n+1)(n+2)+(n+2)+n}{2n(n+1)(n+2)}\right]$

> $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \dfrac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\,\dfrac{(k+1)!(n-k-1)!}{n!} = \dfrac{k+1}{n-k}$

Solution de l'exercice 3 **(Énoncé)** Pour tout/chaque $x \in \mathscr{D}$, on a

$$f(-x) = \ln\left(\frac{2021-x}{2021+x}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Or on a la formule } \ln\left(\dfrac{1}{\square}\right) = -\ln(\square) \\ \quad\text{CàD } \ln\left(\dfrac{Haut}{Bas}\right) = -\ln\left(\dfrac{Bas}{Haut}\right)\end{array}}$$

$$= -\ln\left(\frac{2021+x}{2021-x}\right) = -f(x)$$

Pour tout/chaque $x \in \mathscr{D}$, on a

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} \\ &= \frac{\dfrac{1}{e^{2x}}-1}{\dfrac{1}{e^{2x}}+1} \\ &= \frac{\dfrac{1-e^{2x}}{e^{2x}}}{\dfrac{1+e^{2x}}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1-e^{2x}}{e^{2x}}\,\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = -f(x) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 **(Énoncé)** On fait par récurrence $H_{<n>} \ : \ u_n = \dfrac{2^n}{2^n+1}$

Initialisation.

On a $u_0 = 2$ et $\dfrac{2^{2^0}}{2^{2^0}-1} = \dfrac{2^1}{2^1-1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$. Donc $H_{<0>}$ est vraie.

Hérédité. On suppose que H_n est vraie

$$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}\text{, CàD } u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}}$$

On chemine

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{(2\,u_n)^2}{1+u_n} &= \frac{2\dfrac{2^n}{1+2^n}}{\dfrac{2^n}{1+2^n}+1} \\ &= \frac{\dfrac{2^{n+1}}{1+2^n}}{\dfrac{2^n+(1+2^n)}{1+2^n}} \\ &= \frac{2^{n+1}}{1+2^n}\,\frac{1+2^n}{2.2^n+1} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

$> P_n = 2+4+\cdots+(2n) = 2\left[1+2+3+\cdots+n\right] = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$

$> P_n + I_n = 1+2+3+\cdots+(2n+1) = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} = (2n+1)(n+1)$

$> I_n = P_n + I_n - P_n = (2n+1)(n+1) - n(n+1) = (n+1)\left[(2n+1)-n\right] = (n+1)^2.$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned} P_n &= 2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times(2n) \\ &= \underbrace{(2.1)}\,\underbrace{(2.2)}\cdots\underbrace{(2(n-1))}\,\underbrace{(2n)} \\ &= \underbrace{2.2...2}_{n\ fois}\ 1.2.3....n \\ &= 2^n\, n! \end{aligned}$$

2. On a $I_n = 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)$, ainsi

$$\begin{aligned} I_n\times P_n &= (1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1))\,.\,(2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times(2n)) \\ &= 1.2.3....(2n-1)(2n)(2n+1) \\ &= \textit{\textbf{Le produit de tous les entiers de 1 à (2n+1)}} \\ &= (2n+1)! \end{aligned}$$

3. On a $I_n\times P_n = (2n+1)!$

$$\text{Conclusion : } I_n = \frac{(2n+1)!}{P_n} = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

$$\text{On utilisera } \left[2^{2^n}\right]^2 = 2^{2^n\times 2} = 2^{2^{n+1}}$$

On fait par récurrence $H_{<n>}\ :\ a_n = \dfrac{2^{2^n}}{2^{2^n}-1}$

Initialisation. On a $a_0 = 2$ et $\dfrac{2^{2^0}}{2^{2^0}-1} = \dfrac{2^1}{2^1-1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$. Donc $H_{<0>}$ est vraie.

Hérédité. On suppose que H_n est vraie

$$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}\text{, CàD } a_{n+1} = \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^{n+1}}-1}}$$

On chemine

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{(a_n)^2}{2a_n-1} &= \frac{\left(\frac{2^{2^n}}{2^{2^n}-1}\right)^2}{2\frac{2^{2^n}}{2^{2^n}-1}-1} \\ &= \frac{\frac{\left(2^{2^n}\right)^2}{\left(2^{2^n}-1\right)^2}}{\frac{2.2^{2^n}-\left(2^{2^n}-1\right)}{2^{2^n}-1}} \\ &\qquad \textit{Or } \left(2^{2^n}\right)^2 = 2^{2^n.2} = 2^{2^{n+1}} \\ &\qquad \textit{et } 2.2^{2^n} - \left(2^{2^n}-1\right) = 2^{2^n}+1 \\ &= \frac{2^{2^{n+1}}}{(2^{2^n}-1)^2}.\frac{2^{2^n}-1}{2^{2^n}+1} \\ &= \frac{2^{2^{n+1}}}{(2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1)} \\ &= \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^{n+1}}-1} \qquad \text{Yes, fini} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

$$\text{On utilisera } \left[2^{2^n}\right]^2 = 2^{2^n\times 2} = 2^{2^{n+1}}$$

On fait par récurrence $H_{<n>}$: $F_n = F_0.F_1\cdots F_{n-1}+2$

Initialisation (n=1). On a

$G = F_1 = \cdots$ et $D = F_0 + 2 = \cdots$

Donc $H_{<1>}$ est vraie.

Hérédité. On suppose que H_n est vraie

$$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}, \text{ CàD } F_{n+1} = F_0.F_1\cdots F_n+2}$$

On chemine de Gauche à droite

$$\begin{aligned}
F_0.F_1\cdots F_n+2 &= F_0.F_1\cdots F_{n-1}F_n+2 \\
&\quad \textit{On applique } H_{<n>} \\
&\quad\quad \textit{CàD } F_0.F_1\cdots F_{n-1} = F_n-2 \\
&= (F_n-2)\,F_n+2 \\
&= \left(2^{2^n}-1\right)\left(2^{2^n}+1\right)+2 \\
&= \left(2^{2^n}\right)^2-1+2 \\
&= 2^{2^n.2}+1 \\
&= 2^{2^{n+1}}+1 = F_{n+1} \quad Fini
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 11 (Énoncé) On fait par récurrence (simple)

$$H_{<n>} : 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

Initialisation.

On a bien $1 \leqslant 2 - \frac{1}{1}$;, donc $H_{<1>}$ est vraie.

Hérédité.

On suppose que $H_{<n>}$ est vraie,

$$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}, \text{ CàD} \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}}$$

On y va brutalement .

$$\begin{aligned} Gauche \ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\text{On utilise } H_{<n>} \\ &\leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} = \text{Intermédiaire} \end{aligned}$$

On va montrer directement que : $Interm\acute{e}diaire \ \leqslant \ Final$

$$\begin{aligned} Final \ - \ Interm\acute{e}diaire &= 2 - \frac{1}{n+1} - \left(2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(n^2+n+1) - n(n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $H_{<n+1>}$ est vraie.