Programme de colle de la semaine 1

du Lundi 23 au 27 Septembre.

Questions de cours numéro 1.

> Calcul de $\cos\left({}^{\pi}/_{12}\right)$. On considère le complexe $A = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

> > À l'aide de la forme algébrique, déterminer $\mathrm{Re}(A)$.
> >
> > À l'aide de la forme circulaire, déterminer $\mathrm{Re}(A)$.
> >
> > En déduire la valeur de $\cos\left({}^{\pi}/_{12}\right)$.

> En utilisant l'angle moitié, déterminer $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)$

> Développer $(a+b)^3$.

En déduire une expression de $\cos^3(\theta) = \left[\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right]^3$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$.

> Développer $(a+b)^3$.

En déduire une expression de $\cos(3\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{i3\theta}\right) = \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\right]^3 = \mathrm{Re}\left[cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]^3$.

Questions de cours numéro 2. Du calcul

> Soit n, k des entiers avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

Simplifier $\dbinom{n}{k+1} + \dbinom{n}{k}$ et mettre le résultat sous la forme $\dbinom{\square}{\heartsuit}$

> On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$

Déterminer le signe $u_{n+1} - u_n$.

> On considère la suite (u_n) définie par $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \dfrac{n!}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$.

Montrer que : $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

> Question Bonus : On admet les informations suivantes : $[h]^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de la fonction h, CàD la dérivée de la dérivé de la dérivée de la ..... Ainsi on a $[h]^{(n+1)} = \left[h^{(n)}\right]'$

De plus $\dfrac{1}{x^{n-1}\sqrt{x}} = x^{-\left(n-{}^{1}/_{2}\right)} = x^{\alpha} \overset{Dérive}{\rightsquigarrow} \alpha\, x^{\alpha-1}$

Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x > 0,\ \left[\sqrt{x}\right]^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!\,2^{2n-1}\,x^{n-1}\sqrt{x}}$

Exercices.

Démontrer des inégalités par récurrence.