

Racine(s) et imaginaire.

1 Racine carrée (d'un réel)	1	4 Un peu de géométrie	5
2 Racine d'un polynôme et factorisation	3	5 Un peu plus difficile.	6
3 Signe des trinômes.	4	5.1 Forme canonique et racine.	6
		5.2 Décomposition en éléments simples.	7
		5.3 Lien coef/racines.	8
		6 Exercices	9

1 Racine carrée (d'un réel)

On sait que l'équation $X^2 = a$ admet selon des situations 2, 1 ou 0 solutions dans $\mathbb{R}$. Plus précisément.

> Lorsque $a > 0$, l'équation $X^2 = a$ admet deux solutions, $r = \sqrt{a}$ et $r' = -r = -\sqrt{a}$

> Lorsque $a = 0$, l'équation $X^2 = a$ admet une unique solutions $r = r' = 0$

> Lorsque $a < 0$ l'équation $X^2 = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Pour la démonstration, on utilise des théorèmes et du vocabulaire sur les fonctions qui seront rappelées, expliquées et détaillées dans le chapitre sur les fonctions.

On va étudier la fonction f définie par $f(x) = x^2 - a$.

→ Il est facile de justifier que la fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$

→ On dresse le tableau de variation

→ Grâce au tableau de variation (et au théorème de la bijection-monotone), on déduit que la fonction f réalise une bijection de $\mathcal{D} = [0, +\infty[$ sur $\mathcal{A} = [-a, +\infty[$.

Enfin comme $0 \in \mathcal{A} = [-a, +\infty[$, on sait que l'équation $x^2 = a$ admet exactement 1 solutions dans $\mathcal{D} = [0, +\infty[= \mathbb{R}^+$.

Théorème 1. Autours de $\sqrt{a}$

Définition. Soit a un réel positif.

Le nombre $\sqrt{a}$ est l'unique solution positive de l'équation $X^2 = a$.

> **Formulaire.** Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$

> Comme $\sqrt{a}$ est l'unique solution *positive* de l'équation $x^2 = a$,
ainsi on a $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

> $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ et si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

> Comme $\sqrt{a}$ est solution de l'équation ..., on a $(\sqrt{a})^2 = a$

MAIS Attention : $\sqrt{a^2} = |a| \neq a$

> Racine Vs puissance. $\sqrt{a} = a^{1/2}$

Démonstration de $\forall a, b \geq 0, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

> D'une part : D'après les propriétés de $\sqrt{X}$, on a $(\sqrt{ab})^2 = ab$.

Ainsi $\sqrt{ab}$ est une solution positive de l'équation $X^2 = ab$.

> D'autre part : D'après les propriétés de $\sqrt{X}$ et le formulaire sur les puissances,
on a $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = ab$.

Ainsi $\sqrt{a}\sqrt{b}$ est aussi une solution positive de l'équation $X^2 = ab$.

Comme l'équation $X^2 = ab$ admet une unique solution positive, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Définition 2. Quantité conjuguée

Soit a un réel positif.

La quantité conjuguée de $a - b\sqrt{n}$, c'est $a + b\sqrt{n}$

La quantité conjuguée est utilisée pour "gérer" une racine

$$a - b\sqrt{n} = (a - b\sqrt{n}) \frac{(a + b\sqrt{n})}{(a + b\sqrt{n})} = \frac{(a)^2 - (b\sqrt{n})^2}{\text{Gentil bas avec +}} = \frac{\text{Plus de Racine}}{\text{Gentil bas avec +}}$$

$$\frac{1}{a + b\sqrt{n}} = \frac{1}{a + b\sqrt{n}} \frac{(a - b\sqrt{n})}{(a - b\sqrt{n})} = \frac{a - b\sqrt{n}}{(a)^2 - (b\sqrt{n})^2} = \frac{\text{Haut}}{\text{Plus de Racine en bas}}$$

2 Racine d'un polynôme et factorisation

Définition 3. C'est quoi un Polynôme

> Un polynôme c'est une objet de la forme $2X^3 + 3X^2 - X + 1$
CàD un "mélange" de gentil monôme, $X^0, X^1, X^2, \dots, X^{41}$

Théorème. Développé Vs Factorisé

Il deux façons visualiser un polynôme

> Avec ses coef, CàD sous la forme développée (ou algébrique) :

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

> Avec ses racines, CàD sous la forme factorisée :

$$P(X) = a(X - r)(X - r')$$

> Une expression polynômiale en $\square$, c'est un "mélange" de gentille $\square, \square^0, \square^1, \square^2, \dots, \square^{41}$

Exemple.

$e^{3x} + 2e^{2x} + 1$ est un polynôme en $\square =$

$\cos^2(x) + 1$ et $\sin^4(x) + \cos(x) + 1$ sont des polynômes en $\square =$

Définition 4. Racine d'un polynôme

Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme et r un nombre dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que r est une racine de P Ssi $P(r) = 0$

Exemple.

$r = 1$ est une racine du polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$

$r = 2$ est une racine du polynôme $P(X) = X^3 - 8$

$r = 1$ est une racine du polynôme $P(X) = X^n - 1$

Théorème. Le théorème de factorisation des racines.

$$\left. \begin{array}{l} P(X) \text{ est un polynôme} \\ r \text{ est une racine de } P(X) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{On peut factoriser } (X - r) \\ \text{CàD } P(x) = (X - r) [\text{Un autre polynôme}] \end{array}$$

Remarque : le théorème est faux lorsque P n'est pas un polynôme!!!!!!

3 Signe des trinômes.

Pour déterminer le signe d'un trinôme $P(X) = aX^2 + bX + c$,

On recherche ses racines, CàD on résout l'équation
puis on factorise et enfin on fait un Bô tableau de signe.

On recherche ses racines, CàD on résout l'équation

Il y a deux situations particulières lorsque le trinôme n'est pas tri.

$aX^2 + bX = 0$ $2X^2 - 3X = 0 \iff X(2X + 3) = 0$ Les solutions de l'équation sont $r = 0$ et $r' = -3/2$		$aX^2 + c = 0$ $2X^2 - 3 = 0 \iff X^2 = 3/2$ l'équation admet 2 sol $r = +\sqrt{3/2}$ et $r' = -\sqrt{3/2}$
--	--	---

Sinon on utilise le discriminant et les célèbres formules

Théorème 5. Signe des trinômes

Le signe de $ax^2 + bx + c$ dépend du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- > Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ Alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de ax^2 .
- > Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ Alors $ax^2 + bx + c$ est un carré,
- > Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'éq admet 2 sol/racine r et r'
et on a la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - r')$
puis un bô tableau de signe.

4 Un peu de géométrie

Théorème 6. Géométrie d'un trinôme.

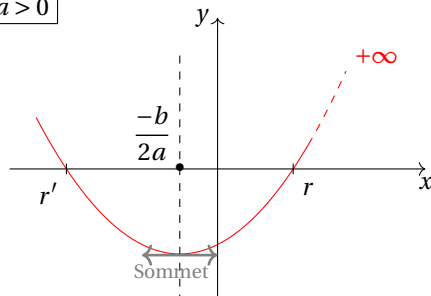
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

On considère la fonction polynômiale T de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par

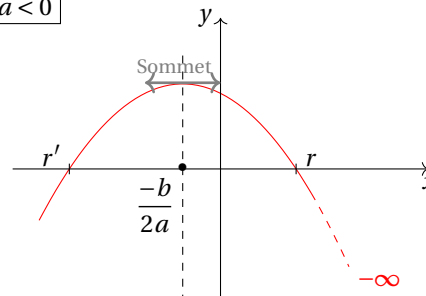
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(x) = a.x^2 + bx + c.$$

Je note Γ le graphe de la fonction T . On a

Si $a > 0$



Si $a < 0$



De plus la fonction T a les propriétés suivantes

> $T(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} (\text{signe de } a) \cdot \infty$

> En $x = -\frac{b}{2a}$, la fonction T présente un extremum.

> La droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie du graphe Γ de la fonction T .

Vocabulaire : La courbe Γ est une parabole.

Démonstration : Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère la fonction polynômiale T de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = a.x^2 + bx + c$.

Pour la démonstration je suppose $a > 0$.

> **On va montrer que** $T(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$

Si on fait rien, c'est une FI

$$\text{On a } T(x) = a.x^2 + bx + c$$

$$= ax^2 \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty \cdot (1 + 0 + 0) = +\infty$$

> **On va montrer qu'il y a un minimum en** $x = -\frac{b}{2a}$

On étudie les variations de la fonction T . Avec le tableau variation, il est clair que en $x = -\frac{b}{2a}$ la fonction T présente son minimum

> **On va montrer l'axe de symétrie**

Voir exercice

5 Un peu plus difficile.

5.1 Forme canonique et racine.

On considère le trinôme $A(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On a

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{C}, \quad ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} \right]$$

$$\text{On cherche à utiliser } (x + \alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$$

$$= a \left[\underbrace{x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2}_{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Application : On en déduit les célèbres formules $r = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

5.2 Décomposition en éléments simples.

Théorème 7. Décomposition en éléments simples.

Soit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

On considère F la fraction rationnelle

$$\forall x \neq r, r', \quad F(x) = \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} \text{ avec } r, r' \text{ les racines du bas.}$$

> Étape 1 : On factorise le trinôme $ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - r')$

$$\text{Ainsi on a } F(x) = \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} = \frac{dx + e}{a(x - r)(x - r')}$$

> Étape 2 : On trouve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \neq r, r', \quad F(x) = \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} = \underbrace{\frac{\alpha}{x - r} + \frac{\beta}{x - r'}}_{\substack{\text{c'est la décomposition} \\ \text{en éléments simples de} \\ \text{de la fraction } F}}.$$

Exemple. On va décomposer en éléments simples la fraction $\frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$.

Avec Δ , on obtient facilement la factorisation $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

$$\frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2x + 1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{\alpha}{x - 2} + \frac{\beta}{x - 3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{\alpha(x - 3) + \beta(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{(\alpha + \beta)x + (-3\alpha - 2\beta)}{(x - 2)(x - 3)}$$

Je choisis α, β tel que $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 & (1) \\ -3\alpha - 2\beta = 1 & (2) \end{cases}$

Pour résoudre le système, on mélange (1) et (2)

$$(1) + 2 \times (2) \rightsquigarrow -\alpha = 2.2 + 1 = 5$$

$$3 \times (1) + (2) \rightsquigarrow \beta = 3.2 + 1 = 7$$

Conclusion : $\forall x \neq 2, 3, \quad \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-5}{x - 2} + \frac{7}{x - 3}$
--

5.3 Lien coef/racines.

Théorème 8. Somme et Produit des racines d'un trinôme.

Soit $T(x)$ un trinôme,

$$\text{on peut écrire } T(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{développé}} = \underbrace{a(x-r)(x-r')}_{\text{factorisé}}$$

$$\text{Alors on a : } r + r' = -b/a \text{ et } r.r' = c/a$$

Démonstration : Pour la démonstration, le plus simple est le mieux. Comme on connaît l'expression des racines r et r' , il est facile de calculer $r + r'$ et $r.r'$.

$$r + r' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2 \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$r.r' = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Quantité conjuguée

$$= \frac{(\dots)^2 - (\dots)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Théorème 9. Système d'équation Somme-Produit

Soit x, y deux réels. on a

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases} \iff x \text{ et } y \text{ sont les racines du polynôme } X^2 - sX + p$$

Démonstration : On fait $\implies$ et $\impliedby$

$$\implies \text{ On suppose que } \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

$$\text{On a } y = s - x, \text{ ainsi } xy = x(s - x) = -x^2 + sx = p$$

Donc x est bien une racine du polynôme.

De même pour y

$\impliedby$ C'est le théorème précédent.

6 Exercices

Quantité conjuguée

Exercice 1. En utilisant la définition Racine, montrer $\sqrt{4} = 2$, puis que $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

Exercice 2. [Correction] Soit $x > 1$ un réel bien choisi. Simplifier l'écriture des réels suivants.
En particulier aucune racine ne doit subsister au dénominateur

$$A = 2\sqrt{20} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{45}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}-3}$$

$$C = \frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{1+x}-2}$$

$$E = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

$$F = \sqrt{\frac{x+1}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

Exercice 3. [Correction]

Soit la fonction $\left[f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]$.

Montrer que la fonction f est impaire.

Exercice 4. [Correction] Montrer que :

$$\forall x, y \geq 0, \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Exercice 5. [Correction] Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{\sqrt{x}}{1+x} \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 6. [Correction] Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$$

Exercice 7. [Correction] Montrer que :

$$\forall x \in [1, 2], \quad \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \leq \sqrt{2}$$

Exercice 8. [Correction] Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Exercice 9. Soit a, b deux réels positifs. Montrer que

$$\frac{2}{1/a + 1/b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{b-a}{\ln(b) - \ln(a)} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Autour des Racines

Exercice 10.

- Justifier que r est racine et faire les factorisations : $X^2 + 5X + 6 \quad r = -2, \quad X^3 - 6X - 2 \quad r = 2$
- Finir la factorisation : $X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1) \left[\dots \right]$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère les polynômes

$$X^2 - \alpha^2, \quad X^3 - \alpha^3, \quad X^4 - \alpha^4, \quad \dots, \quad X^n - \alpha^n$$

Justifier α est une racine puis faire la factorisation par $X - \alpha$

Exercice 11. [Correction] Soit le trinôme $T(X) = X^2 + Xy + 5X - 2y^2 + y + 6$.

Justifier que $-2y - 3$ est une racine du trinôme T puis finir la factorisation.

En déduire la nature géométrique de l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation

$$x^2 + xy + 5x - 2y^2 + y + 6 = 0$$

 Trinôme

Exercice 12. Soit T le trinôme défini par $\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = ax^2 + bx + c$.

Montrer que la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie du graphe Γ de la fonction T .

Exercice 13. Résoudre sur $\mathbb{R}$, les équations/inéquations suivantes

$$x^2 + 2x - 2 > 1$$

$$-x^2 - x > 1$$

$$x^8 + 2x^4 - 1 = 0$$

$$e^{2x} - e^x - 2 = 0$$

Exercice 14. [Correction] Montrer que : $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, t^2 + 2\cos(x)t + 1 \geq 0$

Indication : on a $t^2 + 2\cos(x)t + 1 = T^2 + 2\cos(x)T + 1$

Exercice 15. [Correction] Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que : $x^2 + xy + 2y^2 = 0 \implies [x = y = 0]$

Indication : on a $x^2 + xy + 2y^2 = X^2 + Xy + 2y^2$

 Lien : coef/Racines

Exercice 16. Soit x, y deux réels. Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x + y^2 - y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Exercice 17. [Correction] On considère le système
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 1/x + 1/y = 3/2 \end{cases}$$

Je note $s = x + y$ et $p = xy$

Calculer les valeurs possibles de s et p puis déterminer les solutions du système.

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

$$A = 2\sqrt{4.5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{9.5} = \sqrt{5} [.....]$$

$$B = \frac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}-3} = \frac{....}{(..)^2 - (..)^2}$$

$$C = \frac{...}{2 - \sqrt{32} + \sqrt{3}} = \frac{....}{(..)^2 - (..)^2}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{1+x}-2} = -\frac{\sqrt{1+x}+2}{(..)^2 - (..)^2}$$

$$E = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{(\dots)^2 - (\dots)^2}{[\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}]^2} = \dots$$

$$F = \sqrt{\frac{x+1}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x}}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On va montrer brutalement que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2})$$

$$= \ln\left(\frac{(\dots)^2 - (\dots)^2}{-x - \sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-1}{-x - \sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\square}\right) \quad \text{avec } \square = x + \sqrt{1+x^2}$$

$$= -\ln(\square) = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x)$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Direct + quantité conjuguée.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) Direct

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On y va direct

$$\forall x > 0, \quad 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x} = \frac{(\dots)^2 - (\dots)^2}{1 + \frac{1}{2}x + \sqrt{1+x}} = \frac{1/4 x^2}{.... > 0} \geq 0$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé) Direct + quantité conjuguée.

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\dots)^2 - (\dots)^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Solution de l'exercice 11 (Énoncé) Soit le trinôme $T(X) = X^2 + Xy + 5X - 2y^2 + y + 6$.

> Comme $T(-2y-3) = \dots = 0$, le nombre $-2y-3$ est une racine du trinôme T ;

> Comme $r = -2y-3$ est une racine de T , on sait que $(X-r) = X+2y+3$ se factorise

En effet, on a $X^2 + Xy + 5X - 2y^2 + y + 6 = (X+2y+3)(X-y+2)$

> Soit $M(x, y)$ un point du plan, on a

$$\begin{aligned} x^2 + xy + 5x - 2y^2 + y + 6 = 0 &\iff (x + 2y + 3)(x - y + 2) = 0 \\ &\iff \underbrace{x + 2y + 3 = 0}_{\text{C'est l'eq d'une droite}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x - y + 2 = 0}_{\text{C'est l'eq d'une droite}} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble rechercher est la réunion des 2 droites.

Solution de l'exercice 14 (Énoncé) Il y a plusieurs façon de la faire.

On peut factoriser le trinôme $T^2 + 2\cos(x)T + 1$ (ou bien le mettre sous forme canonique)

$$\text{Comme } \Delta = b^2 - 4ac = 4\cos^2 - 4 = -4\sin^2(x) \leq 0,$$

Le trinôme est du signe de $(1 \ T^2)$ donc toujours positif. Fini.

Solution de l'exercice 15 (Énoncé) On met le trinôme en X sous forme canonique. Ainsi

$$\begin{aligned} x^2 + xy + 2y^2 = 0 &\iff \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + 2y^2 = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} = 0 \\ &\iff \begin{cases} \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = 0 \\ \frac{7y^2}{4} = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = 0 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 17 (Énoncé) On suppose que x, y vérifie le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 1/x + 1/y = 3/2 \end{cases}$

Tout d'abord, comme $1/x + 1/y = 3/2$, on a Forcément x, y sont $\neq 0$.

De plus

$$\begin{aligned} > 1/x + 1/y = \frac{x+y}{xy} = \frac{s}{p} \\ \text{donc } 1/x + 1/y = 3/2 &\iff 2s = 3p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = (x+y)^2 - 2xy = s^2 - 2p \\ \text{donc } x^2 + y^2 = 5 &\iff s^2 - 2p = 5 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 1/x + 1/y = 3/2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2s = 3p \\ s^2 - 2p = 5 \end{cases}$$

Il est maintenant facile de déterminer s puis p puis x et y .