

————— Forme circulaire et argument moitié —————

Exercice 1. On considère les complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$ et $A = \frac{z_1}{z_2}$

1. Déterminer la forme algébrique du complexe A .
2. Déterminer la forme circulaire des complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.
en déduire la forme circulaire du complexe A .
3. Application.
 - > Calculer $\operatorname{Re}(A)$ en utilisant la forme algébrique du complexe A .
 - > Calculer $\operatorname{Re}(A)$ en utilisant la forme circulaire du complexe A .
 - > En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$

Exercice 2. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère le complexe $A = \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}$

1. Simplifier avec l'angle moitié, le complexe : $1 - e^{i\theta}$
2. Simplifier avec l'angle moitié, le complexe : $1 - e^{in\theta}$
3. En déduire une forme simplifier du complexe A puis en déduire que :

$$\operatorname{Re}(A) = \frac{\cos\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

————— Un exercice plus abstrait —————

Exercice 3. [Correction]

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des complexes de module strictement plus petit que 1

On a donc : $z \in \mathcal{D} \iff z \text{ est un complexe et } |z|_{\text{Strict}} < 1$

Soit p et z fixé dans $\mathcal{D}$.

1. Justifier que $|\bar{p}z| < 1$. En déduire que : $\bar{p}z - 1 \neq 0$.
2. Montrer que : $1 - \left| \frac{p-z}{1-\bar{p}z} \right|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|\bar{p}|^2)}{|1-\bar{p}z|^2}$

Remarque méthodologique : Il ne faut pas sombrer dans les calculs!!!

- > On commencera par simplifier le complexe $1 - \left| \frac{H}{B} \right|^2$ en utilisant $|\square|^2 = \square \bar{\square}$
- > puis on remplace $H = p - z$ et $B = 1 - \bar{p}z$

3. En déduire que :

$$\left. \begin{array}{l} p \in \mathcal{D} \\ t \in \mathcal{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p-z}{1-\bar{p}z} \in \mathcal{D}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Simplifier avec l'angle moitié, le complexe : $1 - e^{i\theta}$

$$\begin{aligned}\text{On a } 1 - e^{i\theta} &= e^{i\theta/2} [e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}] \\ &= e^{i\theta/2} [(C - iS) - (C + iS)] \\ &= -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}\end{aligned}$$

2. Simplifier avec l'angle moitié, le complexe : $1 - e^{in\theta}$

$$\begin{aligned}\text{On a } 1 - e^{in\theta} &= e^{in\theta/2} [e^{-in\theta/2} - e^{in\theta/2}] \\ &= e^{in\theta/2} [(C - iS) - (C + iS)] \\ &= -2i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) e^{in\theta/2}\end{aligned}$$

3. En déduire une forme simplifier du complexe A puis en déduire que : $\text{Re}(A) = \frac{\cos\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

$$\begin{aligned}\text{On a } A &= \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{-2i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) e^{in\theta/2}}{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}} = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i(n-1)\theta/2} \\ &= \text{Reel } e^{\square} = \text{Reel } (C + iS)\end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \text{Re}(A) = \text{Reel } C = \frac{\cos\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des **complexes** de module strictement plus petit que 1. On a donc

$$z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow |z| \underset{\text{Strict}}{<} 1$$

Soit p et z fixé qcq dans $\mathcal{D}$.

1. On a $|\bar{p}z| = \sqrt{\bar{p}z \cdot \overline{\bar{p}z}} = \sqrt{\bar{p}z \cdot p\bar{z}} = \sqrt{p \cdot \bar{p}} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = |p||z| \underset{\text{Strict}}{<} 1 \cdot 1 = 1$ donc $\bar{p}z \neq 1$.
2. On a

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{p-z}{1-\bar{p}z} \right|^2 &= 1 - \left| \frac{H}{B} \right|^2 \quad \text{avec } H = p-z \text{ et } B = 1-\bar{p}z \\ &= 1 - \frac{H \bar{H}}{B \bar{B}} \\ &= \frac{B \bar{B} - H \bar{H}}{B \bar{B}} \\ &= \frac{(1-\bar{p}z)(1-p\bar{z}) - (p-z)(\bar{p}-\bar{z})}{|1-\bar{p}z|^2} \\ &= \frac{[1-p\bar{z}-\bar{p}z+|p|^2|z|^2] - [|p|^2-p\bar{z}-\bar{p}z+|z|^2]}{|1-\bar{p}z|^2} \\ &= \frac{1+|p|^2|z|^2-|p|^2-|z|^2}{|1-\bar{p}z|^2} \\ &\quad \text{Or on a } (1-|p|^2)(1-|z|^2) = 1+|p|^2|z|^2-|p|^2-|z|^2 \\ &= \frac{(1-|p|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{p}z|^2} \end{aligned}$$

3. On suppose que p et z sont dans $\mathcal{D}$

On va montrer que $\left| \frac{p-z}{1-\bar{p}z} \right|^2 < 1$

Comme p et z sont dans $\mathcal{D}$, $1-|z|^2 > 0$ et $1-|\bar{p}|^2 = 1-|p|^2 > 0$

$$\text{donc } 1 - \left| \frac{p-z}{1-\bar{p}z} \right|^2 < 0.$$

On ré-organise ainsi $\left| \frac{p-z}{1-\bar{p}z} \right| < 1$ Fini