L'objectif est de faire les exercices 1,2 et 3
Les exercices 4 et sont facultatifs car technique (exo 4) et/ou original et difficile (exo 5)

Exercice 1. [Correction] Encadrement de $n!$.

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. *Rappel :* $a^{bouge} = e^{b\ln(a)}$

On admet que : $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} e$.

1. Étude de la fonction f.
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ de définition et l'ensemble $\mathscr{D}'$ de dérivabilité de f.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0,\ \ln\frac{x+1}{x} \geqslant \frac{1}{x+1}$
   (c) En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Application 1. Démontrer que : $\forall n \geqslant 1, \quad 2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$
3. Application 2. On considère la suite $u_n = \frac{n^n}{n!}$.
   (a) Exprimer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de f et de n.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ n! \leqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

   On pourrait, de même, démontrer mains on l'admettra : $\forall n \geqslant 1, \quad e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n!$.

Exercice 2. [Correction] Un encadrement

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,n],\ 0 \leqslant x - n.\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqslant \frac{x^2}{2n}$.
2. Soit u, v dans $\mathbb{R}$ avec $u \leqslant v$. Montrer que : $0 \leqslant e^v - e^u \leqslant e^v\ (v-u)$.
3. En déduire que

$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \frac{x^2}{2n}e^x$$

Exercice 3. [Correction]

1. Montrer que : $\forall x > 1,\ 2\frac{x-1}{x+1} \leqslant \ln(x)$

   En déduire que : $\forall a, b$ avec $0 < a < b,\ \frac{2}{a+b} \leqslant \frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a}$
2. Montrer que : $\forall x > 1,\ \ln(x) \leqslant \frac{1}{2}\frac{x^2-1}{x}$

   En déduire que : $\forall a, b$ avec $0 < a < b,\ \frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a} \leqslant \frac{a+b}{2ab}$

Plus difficile ou/et plus technique

Exercice 4. [Correction] Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n}$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.
2. Exprimer P_n avec uniquement avec des factorielles et une puissance de 2.
   Indication : Relire le TD 1
3. En déduire une majoration de $\binom{2n}{n}$.

Exercice 5. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

1. On va montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
   Soit $n, m \in \mathbb{N}$. On considère la proposition
   $$H_{<m>} \ : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m \leqslant 1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}$$
   Il est clair que $H_{<0>}$ est vrai.
   (a) Montrer que : Si $m \leqslant n-1$ alors $[H_{<m>} \implies H_{<m+1>}]$
   (b) Explique pourquoi on peut conclure que : Pour $m \in \{0, 1, ..., n\}$, la proposition $H_{<m>}$ est vraie
   Application : $H_{<n>}$ est vraie, CàD $u_n \leqslant 1 + \frac{n}{n} + \frac{n^2}{n^2} = 3$.
2. Attention les questions suivantes sont délicates. On va montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\quad 0 \leqslant x \leqslant y \implies y^{n+1} - x^{n+1} \leqslant (n+1)\, y^n (y - x)$
   (b) En déduire que : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
   Indication : On a $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$