

Les fonctions.		
1 Les fonctions usuelles	1	3.1 Ensemble de définition. 7
1.1 Les Monôme	1	3.2 Paire-impair, Périodique,...Avec des quantificateurs . 7
1.2 Puissance Bouge, CàD $a^b = a^{\text{bouge}}$	2	3.3 Antécédent et Graphe 8
1.3 Logarithme/Exponentielle	3	4 Opérations sur les fonctions. 9
1.4 Sinus hyperbolique,.....	5	4.1 Somme, Produit, Quotient, Composée. 9
2 Comment calculer une dérivée.	6	4.2 Continuité et Dérivabilité. 9
3 Notion de fonction.	7	5 Variations des fonctions. 11
		6 Exercice 13

1 Les fonctions usuelles

1.1 Les Monôme

Définition : Un monôme, c'est CàD $X^2, X^3, ..., X^{-1}, ..., X^{1/2}, ..., X^{\text{fixe}}$.

Situations Particulières.

Selon la valeur de $\square$, il y a plusieurs manières différents de calculer $x^\square$.

> Lorsque $\square = n$ est un entier > 0 . On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = x.x...x$

> Lorsque $\square = -n$ est un entier < 0 . On a alors $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x.x...x} = \frac{1}{x}.\frac{1}{x}....\frac{1}{x}$

> Lorsque $\square = 1/2$. On a alors $\forall a \geq 0, \quad a^{1/2} = \sqrt{a} \stackrel{def}{=} \left| \begin{array}{l} \text{L'unique solution positive} \\ \text{De l'équation } X^2 = a \end{array} \right|$

> Lorsque $\square = \frac{1}{p}$. On a alors $\forall a \geq 0, \quad a^{1/p} = \sqrt[p]{a} \stackrel{def}{=} \left| \begin{array}{l} \text{L'unique solution positive} \\ \text{De l'équation } X^p = a \end{array} \right|$

> Lorsque $\square = \alpha = Bli$, on a la formule générale $\forall x > 0, \quad x^\alpha \stackrel{def}{=} e^{\alpha \ln(x)}$

Formulaire/Kulture

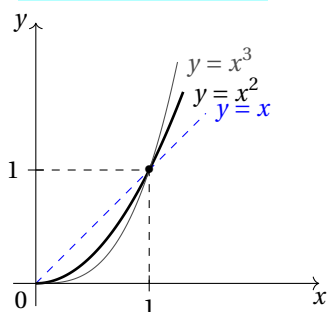
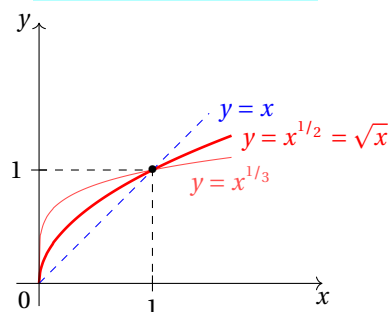
Dérivation

On sait que : $[x^2]' = 2x, \quad [x^3]' = 3x^2, \quad ...$
Les fonctions X^α sont dérivable sur $\mathcal{D}' = \mathbb{R}_+^*$
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{d}{dx} [x^\alpha] = [x^\alpha]' = \alpha.x^{\alpha-1}$

Kulture

- > Lorsque $\alpha > 0$, la fonction $[x \longmapsto x^\alpha]$ est croissante.
- > Lorsque x est "petit", CàD $x \in]0, 1[$
 $0 < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} = x^{1/2} < 1$
- > Lorsque x est "grand", CàD $x > 1$
 $1 < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$

Un Bô dessin

Graphe de $x, x^2, x^3, \dots$ Graphe de $x, x^{1/2}, x^{1/3}, \dots$ 1.2 Puissance Bouge, CàD $a^b = a^{\text{bouge}}$.

Définition 1.

$$a^b = a^{\text{bouge}} \stackrel{\text{def}}{=} e^{b \ln a}$$

On a par exemple

$$2^x = e^{x \ln 2}$$

$$x^x = e^{x \ln x}$$

$$(\sin x)^x = e^{x \ln(\sin x)}$$

$$(\sin x)^{\sin x} = e^{\sin(x) \ln(\sin x)}$$

$$(\ln x)^{\ln x} = e^{\ln(x) \ln(\ln x)}$$

Théorème 2. Propriétés de la fonction $x \mapsto 2^x$.La fonction $[2^x]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx} [2^x] &= \frac{d}{dx} [e^{x \ln(2)}]' \\ &\text{Or } [e^u]' = u' e^u \\ &= \ln(2) \cdot e^{x \ln(2)} = \ln(2) \cdot 2^x \end{aligned}$$

1.3 Logarithme/Exponentielle

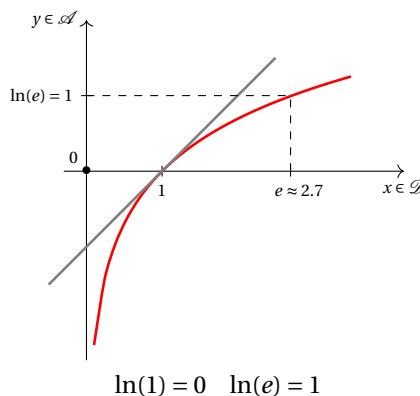
Théorème 3. Propriétés/Formulaire de la fonction ln.

> La fonction ln est dérivable

sur $\mathcal{D} =]0, +\infty[$

$$\forall x > 0, \frac{d}{dx} [\ln(x)] = [\ln(x)]' = 1/x$$

> Le fonction ln réalise une bijection (one-to-one) de $\mathcal{D} =]0, +\infty[$ sur $\text{Im} = \mathbb{R}$



Formulaire : $\forall a, b, x, \square \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \quad \ln(\square^\alpha) = \alpha \ln(\square)$$

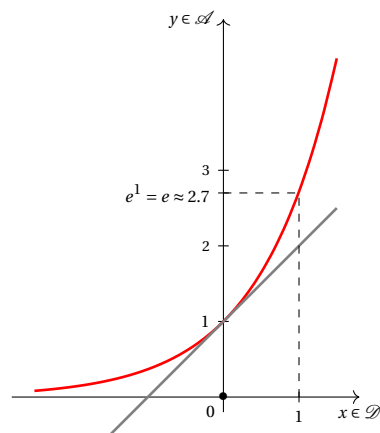
Démonstration : le formulaire se démontre, on le fera en classe.

Théorème 4. Propriétés/Formulaire de la fonction exp.

> La fonction ln est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$$\forall x > 0, \frac{d}{dx} [e^x] = [e^x]' = e^x$$

>> Le fonction exp réalise une bijection (one-to-one) de $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ sur $\text{Im} =]0, +\infty[$



Formulaire : $\forall x, a, b \in \mathbb{R}$

$$e^{a+b} = \quad , e^{a-b} = \quad , e^{-x} = \quad , (e^x)^2 = \quad , e^{(x^2)} =$$

Démonstration : le formulaire se démontre mais c'est plus délicat. On y reviendra plus tard.

Théorème 5. Lien entre ln et exp.

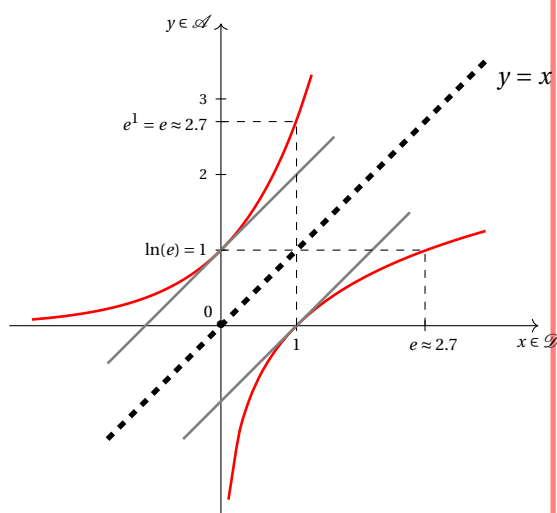
Les fonctions ln et exp forment un couple
Bijection/Réciproque,

$$\text{CàD } \forall x > 0, y \in \mathbb{R} \quad \ln(x) = y \iff x = \exp(y)$$

De plus

$$> \forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$$

$$> \forall x > 0, e^{\ln(x)} = x$$



1.4 Sinus hyperbolique,.....

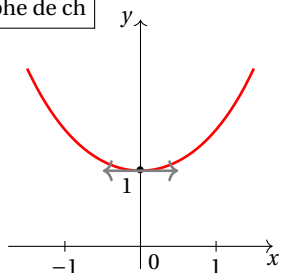
Définition 6.

Les fonctions cosinus hyperboliques et sinus hyperbolique sur $\mathbb{R}$, notées respectivement ch et sh , sont définies de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

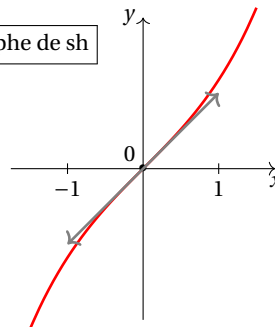
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Théorème 7. Propriétés des fonctions sinh et cosh.

Graphes de ch



Graphes de sh



Propriétés des fonctions ch et sh

> Comme la fonction Cosinus, la fonction ch est dérivable, paire et $ch(0) = 1$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}, ch'(x) = [ch(x)]' = sh(x)$. Complément : $[ch(u)]' = u' \cdot sh(u)$

> Comme la fonction Sinus, la fonction sh est dérivable, impaire et $sh(0) = 0$.

de plus $\forall x \in \mathbb{R}, sh'(x) = [sh(x)]' = ch(x)$. Complément : $[sh(u)]' = u' \cdot ch(u)$

> $\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

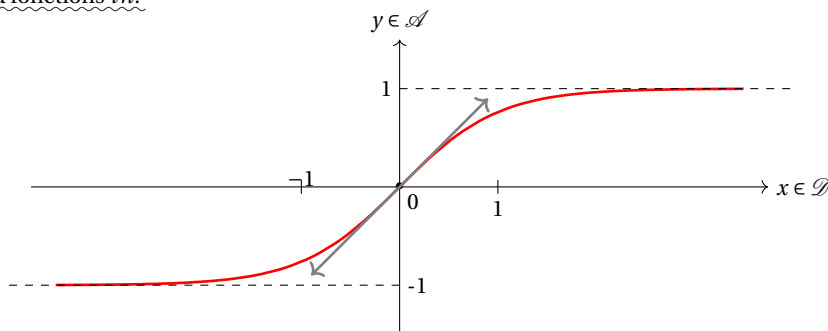
Tangente hyperbolique (th ou tanh)

Théorème 8. Définition et propriétés de th

La fonction tangente hyperbolique, notée th , est définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad th(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Graphes de la fonctions th .



Propriétés de la fonctions th .

> La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$.

> La fonction th est strictement croissante, impaire sur $\mathbb{R}$.

> On a les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} th(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} th(x) = -1$

> La fonction th réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.

2 Comment calculer une dérivée.

Rédaction type

> On justifie que h est dérivable de $\mathcal{D}'$.

> Puis $\forall x \in \mathcal{D}', \quad h'(x) = \frac{d}{dx}[h(x)] =$ On calcule la dérivée
 $\vdots$
 $=$ On simplifie/factorise la dérivée

Reconnaitre/Dériver un monôme.

$$x^2 \rightsquigarrow 2x$$

$$x^3 \rightsquigarrow 3x^2$$

$$x^4 \rightsquigarrow 4x^3$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \rightsquigarrow (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2} \rightsquigarrow (-2)x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

$$\sqrt{x} = x^{1/2} \rightsquigarrow (1/2)x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \rightsquigarrow (-1/2)x^{-3/2} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{x^n \sqrt{x}} = x^{-n-1/2} \rightsquigarrow (-n-1/2)x^{-n-1/2-1} = \frac{-(n+1/2)}{x^{n+1}\sqrt{x}}$$

La formule universelle : $x^\alpha \rightsquigarrow \alpha x^{\alpha-1}$

Formules classiques.

$$\frac{d}{dx} [2f(x) - 3g(x)] = 2[f'(x)] - 3[g'(x)], \quad \frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = u'v + uv', \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Dérivée des composées.

$$\text{Formule générale : } \frac{d}{dx} [f(u)] = u' f'(u)$$

3 Notion de fonction.

3.1 Ensemble de définition.

Définition 9.

Qu'est ce qu'une fonction?

Une fonction f de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est une correspondance qui, à tous éléments x de $\mathcal{D}$ associe un unique élément de $\mathcal{A}$, noté $f(x)$.

Notations classiques : f ou $[f : x \mapsto f(x)]$ ou $\left[f : \begin{array}{c} \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A} \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right]$

Ensemble de Définition.

$\mathcal{D}$, c'est l'ensemble de Définition/Départ de la fonction f .

Comment déterminer $\mathcal{D}$?

On sait que : $x \in \mathcal{D} \iff$ on peut calculer le nombre $f(x)$

Rédaction type pour $\mathcal{D}$.

On peut calculer le nombre $f(x)$ Ssi $\left\{ \begin{array}{l} \text{Liste} \\ \text{des conditions} \end{array} \right.$

Conclusion : la fonction f est définie sur $\mathcal{D} = \dots\dots$

Théorème 10.

On considère une fonction numérique f de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$

> Ne pas confondre : la fonction f et le nombre $f(x)$.

Plus précisément $f(x)$ c'est la fonction évaluée, appliquée en x .

> La grande propriété "évidente" des fonctions : Lorsque $x = 2$ alors $f(x) = f(2)$

Plus généralement, Lorsque $x = x'$ alors $f(x) = f(x')$

3.2 Paire-impair, Périodique,...Avec des quantificateurs

Définition 11.

On considère f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$.

Paire/impair.

> On dit que la fonction f est paire Ssi

> On dit que la fonction f est impaire Ssi

Périodique.

On dit que la fonction f est T -périodique Ssi

croissante.

On dit que la fonction f est croissante Ssi

Majorée.

On dit que la fonction f est Majorée Ssi

Bornée.

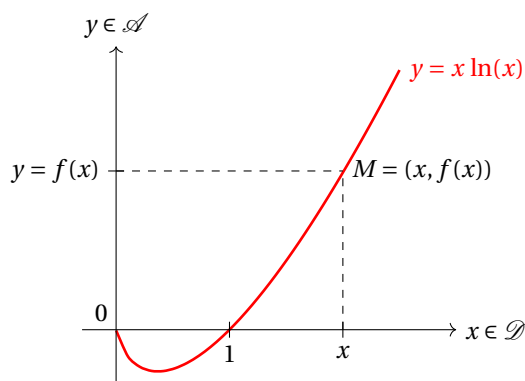
On dit que la fonction f est Bornée Ssi

3.3 Antécédent et Graphe

Définition 12. Représentation graphique

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$

La représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé est la collection des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x varie dans $\mathcal{D}$.



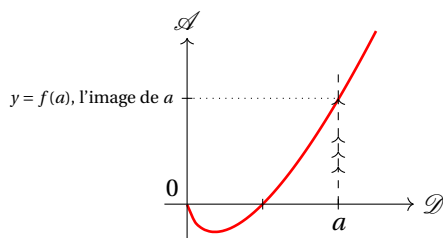
Définition 13. Antécédent-Image.

Soit une fonction f de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ et $x \in \mathcal{D}$ et $y \in \mathcal{A}$.

On suppose que $y = f(x)$

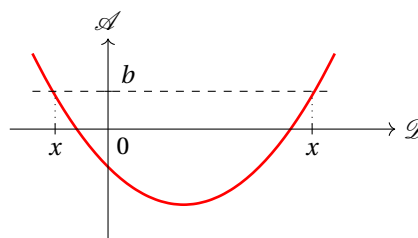
Du point de vue de $x = a$.

Comme $y = f(a)$,
on dit que y est l'image de a .



Du point de vue de $y = b$.

Comme $b = f(x)$,
on dit que x est un antécédent de b .



Théorème : Les antécédents de b sont les solutions de l'équation $f(X) = b$

4 Opérations sur les fonctions.

4.1 Somme, Produit, Quotient, Composée.

Définition 14.

Somme-Produit-Quotient

On considère f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$

On définit les fonctions

$$[f + g] : x \mapsto f(x) + g(x), \quad [fg] : x \mapsto f(x) \cdot g(x) \quad \text{et} \quad \left[\frac{1}{f} \right] : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$$

Composée des fonctions

On considère f et g deux fonctions numériques

On appelle composée de f et g , notée $g \circ f$ la fonction

$$(g \circ f) : x \mapsto g(f(x)) = g(\square) \text{ avec } \square = f(x).$$

$$\text{On peut détailler en écrivant } x \xrightarrow{f} f(x) = y \xrightarrow{g} g(y) = g(f(x))$$

Attention : En général $g \circ f \neq f \circ g$

Théorème 15. Ensemble de définition de $g \circ f$

> Au brouillon, on identifie : $x \xrightarrow{f} f(x) = \square \xrightarrow{g} g(\square) = g(f(x))$

> Puis on rédige.

On peut calculer le nombre $h(g(f(x)))$ Ssi $\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ y = \square = f(x) \in \mathcal{D}_g \end{cases}$

4.2 Continuité et Dérivabilité.

Définition 16. Continue.

On considère f une fonction numérique et $a \in \mathcal{D}$.

Définition de Continue.

La fonction f est continue en a Ssi $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$

Interprétation "intuitive".

Quand x se rapproche de a alors le nombre $f(x)$ se rapproche du nombre $f(a)$

Interprétation géométrique.

Le graphe de la fonction f n'a pas de discontinuité au point a .

Complément : On dit que la fonction f est continue sur $\mathcal{D}$

Ssi la fonction f est continue en tous les points de $\mathcal{D}$.

Théorème 17. Les résultats classiques

> Toutes fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition.

> Les fonctions fabriquées avec les fonctions usuelles et les opérations classiques sont continues.

Définition 18. Dérivable

On considère f une fonction numérique et $a \in \mathcal{D}$.

Dérivable. La fonction f est dérivable en a Ssi $T_{aux}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$

On note alors $\ell = f'(a)$.

Interprétation géométrique.

Le graphe de la fonction f admet une tangente au point a .

Complément : On dit que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$

Ssi la fonction f est dérivable en tous les points de $\mathcal{D}$.

Théorème 19. DérivableDérivabilité des fonctions usuelles.

Les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition,

sauf la fonction $\left[\sqrt{X} \right]$ qui est définie et continue en $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $\left[\sqrt{X} \right]$ n'est pas dérivable en 0.

Attention, Les réciproques sont fausses. On a

$$f \text{ est dérivable sur } \mathcal{D} \implies f \text{ est continue sur } \mathcal{D} \implies f \text{ est définie sur } \mathcal{D}$$

Contre-Exemples

> la fonction $x \mapsto [x]$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas continue $\mathbb{R}$.

Plus précisément. Elle est continue en a Ssi $a \notin \mathbb{Z}$ et elle n'est pas continue en a Ssi $a \in \mathbb{Z}$.

> la fonction $x \mapsto |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ continue $\mathbb{R}$.

Plus précisément. Elle n'est pas dérivable en 0.

Théorème 20. Règles classiques de dérivations

On considère f et g deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$

> Alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur $\mathcal{D}$.

De plus $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$

> Alors la fonction $f.g$ est dérivable sur $\mathcal{D}$.

De plus $(f.g)' = f'g + f.g'$

> Si de plus g ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$.

De plus $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

> On considère f et u deux fonctions dérivables.

On suppose que la composée $f \circ u$ est définie sur $\mathcal{D}$.

Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur $\mathcal{D}$. De plus on a

$$(f \circ u)' = u' \cdot (f' \circ u), \text{ C\`aD } \frac{d}{dx}[f(u)] = u' \cdot f'(u)$$

5 Variations des fonctions.

Définition 21.

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$ et $I \subset \mathcal{D}$

> On dit que la fonction f est croissante sur I Ssi

$$\forall x, x' \in I, \quad [x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')]$$

interprétation : une fonction croissante conserve les inégalités.

> On dit que la fonction f est décroissante sur I Ssi

$$\forall x, x' \in I, \quad [x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')]$$

interprétation : une fonction décroissante inverse les inégalités.

Théorème. Pour déterminer le variation d'une fonction

> On détermine $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

> On calcule f' puis FFB enfin un bô tableau de signe/-variation.

Exemples

> La fonction *Sinus* est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

> La fonction *Sinus* est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

> La fonction *Sinus* n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

6 Exercice

Calcul de dérivée

Exercice 1. Calculer la dérivée pour les fonctions suivantes On ne cherchera pas à déterminer $\mathcal{D}'$, l'ensemble de dérivation.

$$e^{-x} \quad \frac{x}{e^x - 1} \quad \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad \frac{1}{\ln(3-2x)}$$

$$\ln(1 - \ln x) \quad \frac{1}{\ln(4x - 4x^2)} \quad \sin\left(\frac{\ln(2x)}{2}\right) \quad x^x$$

Exercice 2. Calculer la dérivée On ne cherchera pas à déterminer $\mathcal{D}'$, l'ensemble de dérivation.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad \sqrt{1-2\sqrt{1-x}}, \quad \sqrt{x^2-2x-3}, \quad (\ln x)^{\ln x}$$

Exercice 3. Pour les fonction suivantes, déterminer $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et calculer f'

$$f(x) = \ln(2-x) \quad , \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad , \quad f(x) = \sqrt{\ln(\ln(x))} \quad , \quad f(x) = \frac{\sqrt{3x+7}}{4-x^2}$$

Exercice 4. [\[Correction\]](#) Montrer que la fonction définie par l'expression $f(x, y) = y \cdot \ln(x^2 - y^2)$ vérifie

$$\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y)}{y^2}$$

cosh, sinh, tanh

Exercice 5. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$

Exercice 6. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer les formules suivantes

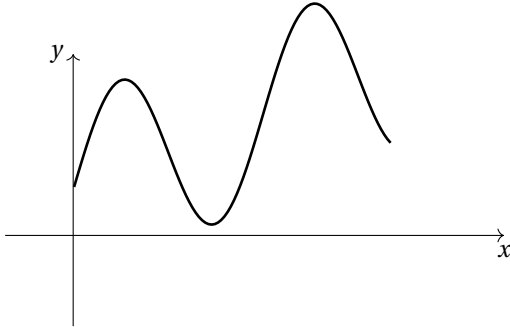
$$\cosh(a+b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b)$$

$$\sinh(a+b) = \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b)$$

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a) \tanh(b)}$$

Généralités

Exercice 7. On considère la fonction $f : x \mapsto f(x)$ donnée approximativement par le graphe suivant



Dessiner les graphes approximatifs des fonctions suivantes

$$f : x \mapsto f(x) + 1$$

$$f : x \mapsto f(x + 1)$$

$$f : x \mapsto f(2x)$$

Exercice 8. [Correction] Montrer que les fonction suivantes sont impaires, CàD que $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2021+x}{2021-x}\right) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \quad \text{et} \quad f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \quad \text{Plus difficile}$$

Étude de fonctions

Exercice 9. Pour les fonction suivantes, déterminer $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et calculer f'

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad f(x) = \ln(2-x), \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f(x) = \sqrt{\ln(\ln(x))}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{3x+7}}{4-x^2}$$

Exercice 10. Étudier la fonction $h : x \mapsto \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)$

Exercice 11. À l'aide d'étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes (et interpréter géométriquement)

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq -1, \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$

Exercice 12. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

Calculer et simplifier $f'(x)$

Exercice 13. On admet qu'il existe une fonction $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Déterminer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Calculer et simplifier f' .

Exercice 14. On admet qu'il existe une fonction $\arcsin$ définie, continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sauf aux bornes

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto f(x) = \arcsin(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \arcsin(2x-1)$

Déterminer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Calculer et simplifier f' .

Exercice 15. [Correction] Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leq b \ln b + e^{a-1}$

Correction.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{2x}{x^2 - y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) + y \frac{-2y}{x^2 - y^2} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y} \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{1}{y} \ln(x^2 - y^2) \\ &= \frac{1}{y^2} \left[y \cdot \ln(x^2 - y^2) \right] = \frac{1}{y^2} f(x, y) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) On a

$$f(-x) = \ln \left(\frac{2021 - x}{2021 + x} \right)$$

Or on a la formule $\ln \left(\frac{1}{\square} \right) = \ln(\square) = -\ln \left(\frac{\square}{1} \right)$

CàD $\ln \left(\frac{Haut}{Bas} \right) = -\ln \left(\frac{Bas}{Haut} \right)$

$$= -\ln \left(\frac{2021 + x}{2021 - x} \right) = -f(x)$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{e^{2x}} - 1}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} \\ &= \dots = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{(\dots)^2 - (\dots)^2}{\sqrt{1 + x^2} + 1} \right) \\ &= \dots = -f(x) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

On fixe une des 2 variables puis on fait une étude de fonction.