

Exercice 1. [Correction] On considère la suite (I_n) vérifiant

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\binom{2n+2}{n+1}$ en fonction de $\binom{2n}{n}$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2^{2n+1}}$

Exercice 2. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+1}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq n^2$.

Exercice 3. [Correction] On admet les formules de dérivations suivantes.

$$\left[\frac{u}{v} \right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad [\arctan f]' = f' \frac{1}{1+f^2}$$

Soit h la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par : $\forall x \in \mathcal{D}, h(x) = \arctan \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

En utilisant les formules admises ci-dessus, calculer et simplifier $h'(x)$.

Exercice 4. Soit $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \in \{1, \dots, n\}$. On considère $u_k = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$

1. Simplifier $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ puis justifier que : $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, u_k \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}$.

Exercice 5. [Correction] On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

1. Simplifier $a_{n+1} - a_n$.
2. Simplifier $b_{n+1} - b_n$.
3. En déduire (par récurrence) que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = b_n$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

On va montrer par récurrence $H_{<n>}$: $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$

> Initialisation.

On a $\frac{(2 \times 0)!}{2^0(0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ donc $H_{<0>}$ est vraie

> Hérédité.

On suppose $H_{<n>}$

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $I_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$

On chemine

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2} I_n = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+2)} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2 \cdot 2(n+1)(n+1)2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(n+1))!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{Fini.} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) On fait par récurrence (à 2 étages)

$$H_{<n>}: u_n \leq n^2$$

> Initialisation avec $n = 1$ et $n = 2$

On a $u_1 = 1 \leq 1^2$ et $u_2 = u_1 + \frac{a_0}{0+1} = 2 \leq 2^2$ OK

> Hérédité. On suppose $H_{<n>}$ et $H_{<n+1>}$

On va montrer $H_{<n+2>}$

$$\text{CàD } u_{n+2} \leq (n+2)^2$$

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+2} &= u_{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \leq (n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1} \\ &\leq (n^2 + 2n + 1) + \frac{n^2}{n+1} \\ &\leq n^2 + 3n + 1 \leq n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 \quad \text{Fini} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On trouve

$$\forall x \in \mathcal{D}', f'(x) = \left[\arctan \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]' = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2} = \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Simplifier $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ puis justifier que : $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{2}$.

On a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{1}{n^{k+1}} \binom{n}{k+1}}{\frac{1}{n^k} \binom{n}{k}} = \frac{n^k}{n^{k+1}} \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{1}{n} \frac{n-k}{k+1}$$

On a

$$G - p = \frac{1}{2} - \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \frac{n-k}{k+1} = \frac{n(k+1) - 2(n-k)}{n(k+1)} = \frac{n(k-1) + 2k}{n(k+1)} \geq 0 \quad \text{car } k \geq 1$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{k=2n+1} + \underbrace{\frac{-1}{2n+2}}_{k=2n+1} \\
 &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}
 \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n &= \sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
 &= \underbrace{\frac{-1}{n+1}}_{k=n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right) + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{k=2n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{k=2n+1} \\
 &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}
 \end{aligned}$$

3. La récurrence est facile car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = b_{n+1} - b_n$